Phys. sp.
293
m

Phys. sp.
293 m

Hergesell

Ueber die Aenderung

der Gleichgewichtsflächen der Erde

durch die

Bildung polarer Eismassen und die dadurch verursachten Schwankungen des Meeresniveaus.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

eingereicht bei der

philosophischen Facultät der Kaiser-Wilhelms-Universität Strassburg

von

H. Hergesell.

Mit zwei Karten.

Stuttgart.

E. Schweizerbart'sche Verlagshandlung (E. Koch).

1887.

2610

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

K. Hofbuchdruckerei Zu Guttenberg (Carl Grüninger) in Stuttgart.

Ueber die Aenderung der Gleichgewichtsflächen der Erde durch die Bildung polarer Eismassen und die dadurch verursachten Schwankungen des Meeresniveaus.

Von

H. Hergesell.

Mit 2 Tafeln.

Schon seit langer Zeit ist die Aufmerksamkeit der Geologen und Geographen auf Erscheinungen gerichtet, welche dafür sprechen, dass die Grenzen zwischen dem festen nnd flüssigen Elemente keine dauernden sind, dass ein ewiges Schwanken im Verhältniss des Areals der Festländer zu dem der Oceane stattfindet. Eine solche Verschiebung der Strandlinie wurde schon früh auf der skandinavischen Halbinsel und am mittelländischen Meere, später auch in Grönland constatirt; und jetzt giebt es wohl keinen Continent, an dessen Küsten nicht eine Verschiebung des Meeresniveaus irgendwo beobachtet wäre. Es ist nicht der Zweck dieser Untersuchung, diese Schwankungen der Uferlinien aufzuzählen und durchzumustern, besonders, da eine solche Zusammenstellung schon vielfach geschehen ist. Wir erwähnen hier in erster Linie das Hahn'sche Werk: „Untersuchungen über das Aufsteigen und Sinken der Küsten; ein Beitrag zur allgemeinen Erdkunde“, in dem alles wesentliche, was hierher gehört, zu finden ist, wenn auch wohl manche Angaben vor einer strengen Kritik nicht bestehen würden. Uns interessiren vor Allem die Theorien, welche die fraglichen hierhergehörenden Erscheinungen erklären sollen. Zuerst dachte man an eine allgemeine Änderung des Meeresstrandes, besonders schwedische Gelehrte, wie Celsius, Linné und andere. Jedoch bald trat die Ansicht zu Tage, dass nicht das Wasser das ursprünglich bewegliche

Element sei, sondern dass ein Heben und Sinken des festen Landes die Verschiebung der Strandlinie hervorbringe. Diese Theorie wurde bald die allgemein herrschende, nachdem sich Leopold v. Buch für dieselbe im entschiedenen Sinne ausgesprochen hatte. Die secularen Hebungen und Senkungen gaben lange Zeit das einzig genügende Mittel ab, um die Uferverschiebungen zu erklären. Stark erschüttert wurde diese Ansicht erst, als sich in der Geologie neue Ansichten über Gebirgsbildung und ähnliche Fragen Bahn gebrochen hatten. Nachdem man zur Einsicht gelangt war, dass nicht in senkrecht zur Erdoberfläche wirkenden Kräften die Ursache der Faltenbildung zu suchen sei, sondern das die Unregelmässigkeiten der Oberfläche durch tangentiale Kräfte hervorgebracht wären, fand die Suess'sche Behauptung bald allgemeinen Anklang, „dass es überhaupt keine bedeutenden Verticalbewegungen der festen Erdrinde gäbe, durch welche ein bestimmter Theil derselben dem Erdmittelpunkte genähert oder von ihm entfernt würde". Die Theorie der secularen Hebungen und Senkungen wurde wiederum aufgegeben, man musste sich nach einer anderen Erklärung für die Schwankungen des Meeresspiegels umsehen. Bahnbrechend für diese neuen Anschauungen war die Abhandlung von Suess: „Über die vermeintlichen Schwankungen einzelner Theile der Erdoberfläche."

In dieser will der Verfasser alle Verschiebungen der Strandlinie durch Niveauschwankungen erklären, ohne dass er jedoch nähere Gründe für diese Oscillationen des Meeresspiegels giebt. Es ist wohl anzunehmen, dass Suess im Allgemeinen die Faltenbildung auf der Erdoberfläche für die Ursache der Verschiebungen hält. Jedoch bleibt Näheres über seine Erklärung abzuwarten.

Die im Jahre 1882 erschienene Abhandlung Penck's: „Schwankungen des Meeresspiegels. München", verfolgt denselben Zweck, nur durch Niveauänderungen die Küstenverschiebungen zu erklären. Sie hat nicht nur das Verdienst, die meisten bisher aufgestellten Theorien in ihren Grundzügen wiederzugeben, sondern sie scheint auch alle Schwierigkeiten hinwegzuräumen, die sich bis jetzt noch denjenigen Theorien entgegenstellten, die allein in Niveauschwankungen die Erklärung der Uferverschiebung suchen. Es möge gestattet sein, in den folgenden Zeilen etwas näher auf den Inhalt der Penck'schen Schrift einzugehen, einmal um hierdurch einen klaren Einblick in den Stand der jetzigen Sachlage zu gewinnen, andererseits, um die nöthigen Grundlagen für eine Kritik der neuen Theorie zu erhalten.

Als Hauptursache für die Verschiebung der Strandlinie werden wirkliche Bewegungen der Wassermasse angesehen, die im Allgemeinen in Gestaltsveränderungen des festen Erdkörpers ihren Grund haben. In erster Linie kommen jedoch diejenigen Verschiebungen in Betracht, welche durch gewaltige Eisbildungen auf dem festen Lande in der Nähe der Polarländer hervorgerufen werden. Die Existenz einer mächtigen Eisdecke muss verschiedene Wirkung auf den Stand des Meeresspiegels haben. Erstens muss eine allgemeine Verminderung der Meerestiefe eintreten; denn die Bildung des Eises erfolgt hauptsächlich auf Kosten des Wassers der Oceane; je mehr Eis entsteht, um so mehr Wasser wird dem Meere entzogen. Die zweite Wirkung der Eisbedeckung ist eine lokale. Die dem Lande auflagernden Eismassen üben eine anziehende Kraft auf die umgebenden Wassertheilchen aus, sie müssen dadurch die Geoidflächen, d. h. die Flächen gleichen Potentials, über ihren ursprünglichen Stand erheben. Eine solche Erhebung der Niveauflächen bringt aber stets ein entsprechendes Steigen des Meeres mit sich.

Einen weiteren Einfluss kann nach der Meinung Penck's[1] die Bildung solcher Eismassen durch Verrückung des Schwerpunkts des ganzen Erdkörpers erlangen; eine solche wird dann eine allgemeine Verschiebung des ganzen Niveaus mit sich bringen. Das Wasser wird dorthin strömen, wo sich die störenden Massen, welche die Verschiebung des Schwerpunkts bedingen, befinden. — Wenn also zu irgend einer Zeit eine gewaltige Eisbedeckung der nördlichen Festlandmassen vorhanden war, so mussten folgende Änderungen im Meeresniveau von Statten gehen. Einmal fand eine allgemeine Erniedrigung des Wasserspiegels statt, die durch Entziehung der Wassermasse, die zur Eisbildung notwendig war, hervorgebracht wurde; dann zeigte sich ein allgemeines Schwellen des Meeres, aber nur in der Nähe der Eismassen, da der Schwerpunkt des Erdkörpers und damit die ganze Wasserhülle dorthin gerückt wurden; drittens endlich brachte die Gravitation der gebildeten Eismassen ein lokales Ansteigen des Oceans hervor, dessen Ausmaass von Ort zu Ort wechseln konnte. Je nachdem die beiden letzten Wirkungen oder die erstere überwiegt, ist ein Fallen oder Steigen des Meeres zu beobachten.

Die Thatsachen, die durch Beobachtung geliefert und durch die Theorie zu erklären sind, ergeben sich als folgende:

---

[1] Wir werden später sehen, dass die Sache sich anders verhält.

1) Während des Maximums der Eiszeit, d. h. als die Eisdecke die grösste Ausbreitung und Mächtigkeit hatte, fand kein Anschwellen des Meeres, sondern eher ein Sinken statt.
2) Ein bedeutendes Steigen des Niveaus trat erst nach dem Maximum der Vereisung ein, als diese schon bedeutend im Schwinden begriffen war.
3) Dieses Steigen war durchaus kein gleichmässiges, sondern die Spuren früherer Meeresniveaus finden sich in den verschiedensten Höhenstufen, derart, dass es in keiner Weise gelingt, irgend ein System in diese Spuren früherer Meeresstrande zu bringen.

Die erste Erscheinung, das Sinken des Meeres zur Zeit des Höhepunktes der Vereisung wird durch die eingetretene Volumenverminderung des Weltmeers erklärt.

Nach Angaben Penck's wird dem Meere durch die Vereisung der Festländer ungefähr 1,9 % Wasser entzogen. Dadurch wird ein allgemeines Sinken von 65 m hervorgebracht. Die Attraction der Eismassen liefert dagegen eine Anschwellung von rund 100 m. Diese Zahlen liefern immer noch ein Steigen von ca. 30 m, ohne dass die Schwerpunktsverschiebung in Betracht gezogen ist. Um nun das nothwendige Sinken zu erzielen, muss angenommen werden, dass der Südpol angenähert in demselben Umfange vergletschert war, wie der Nordpol. Hierdurch wird einerseits dem Meere so viel Wasser entzogen, dass die noch vorhandene Anschwellung in eine Senkung übergeht, andererseits wird eine Schwerpunktsverschiebung gänzlich vermieden, da sich die borealen und australen Eismassen annähernd das Gleichgewicht halten werden. Es ist hier zu erwähnen, dass die Theorie bereits einer neuen Hypothese bedarf, um die beobachteten Erscheinungen zu erklären.

Der zweite Punkt, das Anschwellen des Meeres während des Rückgangs der Vereisung, wird nur im Allgemeinen dahin erklärt, dass durch das Abschmelzen dem Meere bedeutende Wassermengen zugeführt wurden, während die Attraction der noch vorhandenen Eismassen weiter wirkte. Wie aus der allgemeinen Senkung, die im Höhepunkt der Eiszeit in der Nähe der vergletscherten Gegenden sich vorfand, ein Steigen des Meeresspiegels bis über 200 m über sein jetziges Niveau durch die angeführten Ursachen erfolgt ist, wird nicht des Näheren ausgeführt. Zu einer hinreichenden Erklärung müssen auch hier wiederum die australen Eismassen zu

Hilfe genommen werden. Dies ist etwa so zu denken, dass das Schwinden der Vergletscherung der Südpolarländer bedeutend schneller geschah, als am Nordpol.

Dann war die südliche Eismasse dem Meere schon beinahe vollständig als Wasser zurückgegeben, während die nördliche mit ihren Attractionswirkungen zum Theil noch fortbestand; so dass hierdurch und durch die jetzt nothwendig erfolgende Verschiebung des Schwerpunkts thatsächlich eine bedeutende Anschwellung der Wassermassen in den Nordpolargegenden eintreten musste. Wir wollen hier gleich bemerken, dass diese Ansichten nicht alle der hier betrachteten Theorie als eigenthümlich angehören, sondern dass ähnliche Gedanken über die Wirkung der Eismassen schon früher gehegt wurden. Bei Adhémar, Croll, Pettersen, Hebert finden sich verwandte Erklärungen. Aber alle derartige Versuche wurden immer leicht widerlegt, so lange die dritte Erscheinungsreihe, die lokalen Schwankungen desselben Niveaus, nicht gedeutet werden konnte. Überall zeigen die Strandlinien und Terrassen ein ungleichmässiges Steigen und Fallen des Meeres, nirgends lassen sich die beobachteten Ufermarken auf grössere Strecken in einen einigermaassen genügenden Zusammenhang bringen; und doch verlangen die Erklärungsweisen, die die Verschiebung des Schwerpunkts und den ungleichen Rückgang der Vereisungen auf beiden Hemisphären zu Hilfe nehmen, ein nahezu gleiches Zurückweichen und Ansteigen des Meeres. Die Theorie, die unserer Betrachtung hier zu Grunde liegt, will diese Erklärung geben, und dieses ist auch das wesentlich Neue, was sie den schon früher ausgesprochenen ähnlichen Gedanken hinzufügt.

Wenn thatsächlich durch die Attractionskräfte der Eismassen ein einigermaassen beträchtliches Ansteigen des Meeres hervorgebracht wurde, so konnte dieses doch kein gleichmässiges sein, sondern war ohne Zweifel lokalen Schwankungen unterworfen. Je nach der Ausdehnung und Mächtigkeit des Eises musste die Erhebung der Geoidflächen sich als eine von Ort zu Ort verschiedene herausstellen und damit waren auch im Steigen des Meeres räumliche und zeitliche Schwankungen verknüpft.

„Ist einmal erkannt," so schliesst Penck seine Auseinandersetzungen, „dass der Meeresspiegel durch Attraction wesentlich beeinflusst wird, so ist damit eine Quelle für eine Menge lokaler, auf kurze Erstreckungen hin fühlbarer Oscillationen des Meeresspiegels gegeben, und es ist nicht mehr gestattet, aus lokal wech-

selnden Hebungs- und Senkungserscheinungen nur auf ungleiche Bewegungen der Erdkruste zu schliessen.“

Soweit die Theorie Penck's, welche in seiner schon erwähnten Schrift mit einer Fülle von einzelnen Thatsachen belegt wird.

Eine kritische Betrachtung dieser Erklärungsweise hat vor allen Dingen die Aufgabe, ihre Grundlage, die Attractionswirkungen der in Frage kommenden Eismassen genau auszuwerthen. Andere ebenfalls zu erörternden Fragen, wie das Verhältniss der borealen und australen Vereisung, die auch in der Theorie eine grosse Rolle spielen, kommen in zweiter Linie in Betracht.

Die Attractionswirkungen lassen sich nur dann der Rechnung unterwerfen, wenn man über die Grösse und die Mächtigkeit der Vereisung genauere Daten besitzt.

Über den ersten Punkt liegen verschiedene Angaben vor, unter anderen auch solche von Penck. Es schien mir am vortheilhaftesten, mich dieser Daten über das Areal der Vergletscherung zu bedienen, wenn auch in diesen wohl nicht Alles mit Sicherheit constatirt ist. Auf der beigegebenen Karte sind die Grenzen der Vergletscherungen eingetragen.

In Europa ging hiernach die Grenze der Eisbedeckung von Nowaja Semlja in gerader Richtung nach Charkow, bog dann nach Westen um, und zog, sich ziemlich genau am 50. Parallel haltend, zuletzt etwas höher steigend, durch Deutschland nach England und Irland, um von hier in fast gerader Linie über die Fär Öer nach Skandinavien und Nowaja Semlja zurückzukehren. Noch gewaltiger war die Vereisung Nordamerikas; dort erstreckte sich die Grenze des Inlandeises von Grönland nach New Foundland, gieng beim 40. Parallel in das Innere hinein, erreichte hier die Flussgebiete des Ohio und Missouri, um weiter im Westen mit den Eismassen zusammenzustossen, die die Roky mountains ausstrahlten. Die genaue Begrenzung im Norden ist jetzt wohl noch nicht möglich; die auf der Karte gezogene Linie ist eine willkürliche.

Über die Mächtigkeit dieser Eisdecke lassen sich nur Vermuthungen aussprechen. Nimmt man an, dass das ganze Land vollständig unter Eis begraben lag, so muss die Dicke des Eises in der That eine gewaltige gewesen sein. Die Annahmen schwanken zwischen 1000 und 4000 m. Penck selbst nimmt bei seiner annähernden Schätzung der Attractionswirkungen einen Durchschnittswerth von 1000 m an. Ich werde deshalb auch diesen Werth den Rechnungen zu Grunde legen, bemerke jedoch gleich, dass die

Annahme einer anderen Mächtigkeit keinen grossen Einfluss auf das allgemeine Resultat besitzen kann, da die grössere Attraction durch die grössere Wasserentziehung compensirt wird.

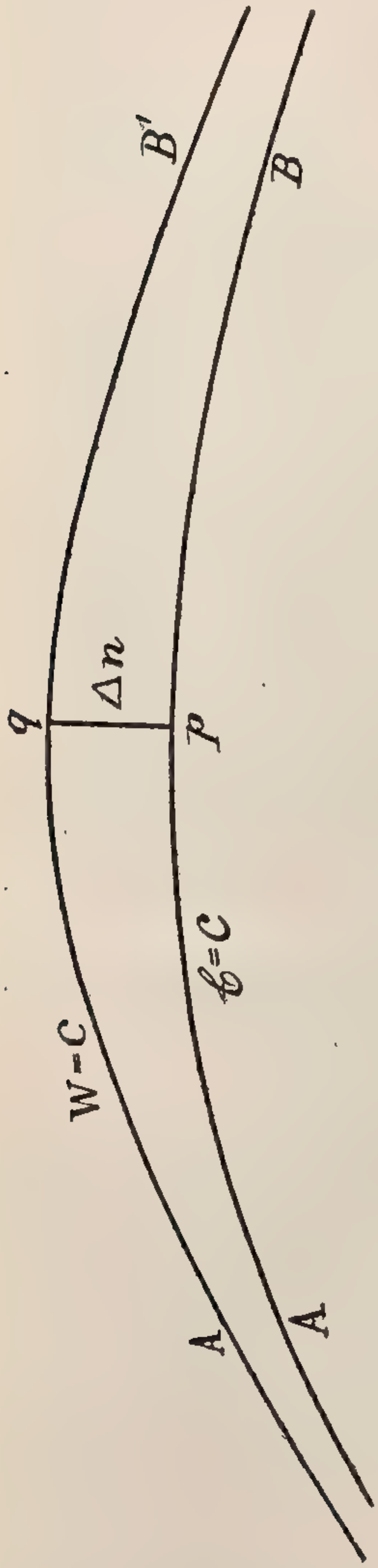
Um eine mathematische Berechnung der Gravitationswirkungen bewerkstelligen zu können, dürfen wir natürlich nicht die auf der Karte eingezeichneten unregelmässigen Eisgrenzen als Grundlage der Rechnung wählen, sondern wir müssen diese Grenzen durch mathematische Figuren ersetzen. Ich wähle nach dem Vorgange von Helmert, der ähnliche Rechnungen für die Attractionswirkungen der Continente angestellt hat, Kreise. Die Formeln führen dann auf verhältnissmässig einfache Functionen. Wie die Grenze der Eisbedeckung hierdurch modificirt wird, lässt die Karte erkennen. Das Inlandeis von Nordamerika wird jetzt von einem Kreise begrenzt, dessen Mittelpunkt in der Hudsonsbay liegt, der sich im Osten ziemlich genau an die wirkliche Eisgrenze anschmiegt, dagegen im Westen und Norden, wo die Grenze so wie so willkürlich angenommen ist, etwas abweicht. Für das europäische Eis wird die Begrenzung durch zwei Kreise geleistet. Auch sie schmiegen sich möglichst genau den wirklichen Eisgrenzen an. Die Umfassung des Areals ist hier keine vollkommene. Um grössere Genauigkeit zu erzielen, könnte man noch einen dritten und vierten Kreis zu Hilfe nehmen. Wir werden jedoch später zeigen, dass die Fehler, die durch das Weglassen dieser Kreise entstehen, nicht bedeutend sind.

Die Fläche, die die Kreise einnehmen, ist annähernd dieselbe wie das Areal der eingezeichneten Vergletscherung.

Wir haben nun folgende Aufgabe zu lösen:

Auf der Erdoberfläche haben sich im Laufe der Zeit drei gewaltige Eiscylinder von gegebenen Dimensionen und Positionen aufgelagert. Es sollen die Veränderungen berechnet werden, die die Gleichgewichtsflächen der Erde, die sogenannten Geoidflächen, durch die Attractionswirkungen dieser Eiskörper erleiden; ferner soll angegeben werden, welche Schwankungen hierdurch im Niveau des Meeres entstehen. Die Hauptaufgabe ist hier die Berechnung der Veränderung der Geoidflächen, da sich aus diesen leicht die Lage des Meeresspiegels angeben lässt. Im folgenden setze ich voraus, dass die Erde eine Kugel vom Radius R und der mittleren Dichte Θ_m sei, in welcher die Schichten gleicher Dichte concentrische Kugelschalen bilden und auf der sämmtliche hervorragenden Massen, also auch die Eismassen, in Gestalt von Flächenbelegungen

condensirt seien. Ferner nehme ich an, dass im ungestörten Zustande, d. h. bevor sich die Eiscylinder gebildet haben, die Geoidflächen ebenfalls Kugelflächen sind. Diese Annahme ist zwar keine streng richtige, da die Continente, die Gebirgsrücken etc. ebenfalls Abweichungen von der Kugelgestalt hervorbringen; jedoch ist sie hier um so mehr erlaubt, als sie einerseits lediglich der Einfachheit der Betrachtung halber geschieht, andererseits die sogenannten Continentalwellen des Geoids, wie sie noch Fischer in seiner Gestalt der Erde vermuthete und ausrechnete, nach neueren Untersuchungen kaum existiren. Wenigstens findet Helmert[1] das äusserst wichtige Resultat, „dass die Wirkung der Continentalmassen mehr oder weniger compensirt wird durch eine Verminderung der Dichtigkeit der Erdkruste unterhalb der Continentalmassen, dergestalt, dass von einer gewissen Tiefe unterhalb des Meeresniveaus an bis zur physischen Erdoberfläche verticale Prismen von gleichem Querschnitt annähernd gleiche Massen enthalten, wo man die Prismen auch nehmen möge.“



Es sei allgemein W das Potential der Erdkugel mit allen auflagernden Massen, insbesondere auch mit denjenigen, deren Störungswirkungen berechnet werden sollen. $\mathfrak{E}$ sei das Potential ohne diese letzteren, und v endlich das Potential der störenden Eismassen. Demnach ist

$$W = \mathfrak{E} + v.$$

Setzen wir ferner unter C eine Constante voraus, so ist $\mathfrak{E} = C$ die Gleichung der ungestörten Geoidfläche und $W = C$ diejenige der gestörten. Es bedeutet nun in der nebenstehenden Figur A B die ungestörte, A' B' die gestörte Fläche.

Wir errichten in p die Normale p q, dann hat $\mathfrak{E}$ im Punkte q der Niveaufläche $W = C$ den Werth $C - v$, da ja allgemein die

[1] Theorien der höheren Geodäsie. Bd. II, S. 365.

Gleichung $W = \mathfrak{E} + v$ besteht. Da aber Punkt q auf der Normalen von p um Δn absteht, so können wir den dort herrschenden Werth von $\mathfrak{E}$ vermittelst der Taylor'schen Reihe ausdrücken. Wir finden:

$$\mathfrak{E}q = C + \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n}\right)_C \Delta n + \ldots .$$

Setzen wir beide Ausdrücke gleich, so erhalten wir

$$-v = \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n}\right)_C \Delta n + \ldots .$$

Das giebt:

$$\Delta n = -\frac{v}{\left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n}\right)_C}$$

Δn ist nun die Erhebung der gestörten Geoidfläche über die ungestörte.

$\mathfrak{E}$ ist das Potential der Erde ohne die störenden Massen, d. h. in unserem Falle annähernd das Potential einer homogenen Kugel von der Dimension und mittleren Dichte des Erdkörpers. $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n}$ ist folglich die Beschleunigung in der Richtung des Erdradius; $\left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n}\right)_C$ ist daher gleich $-g_m$, wenn wir unter g_m die mittlere Beschleunigung an der Erdoberfläche verstehen. Führen wir diese Grösse ein, so geht unsere Formel über in:

$$\Delta n = \frac{v}{g_m}$$

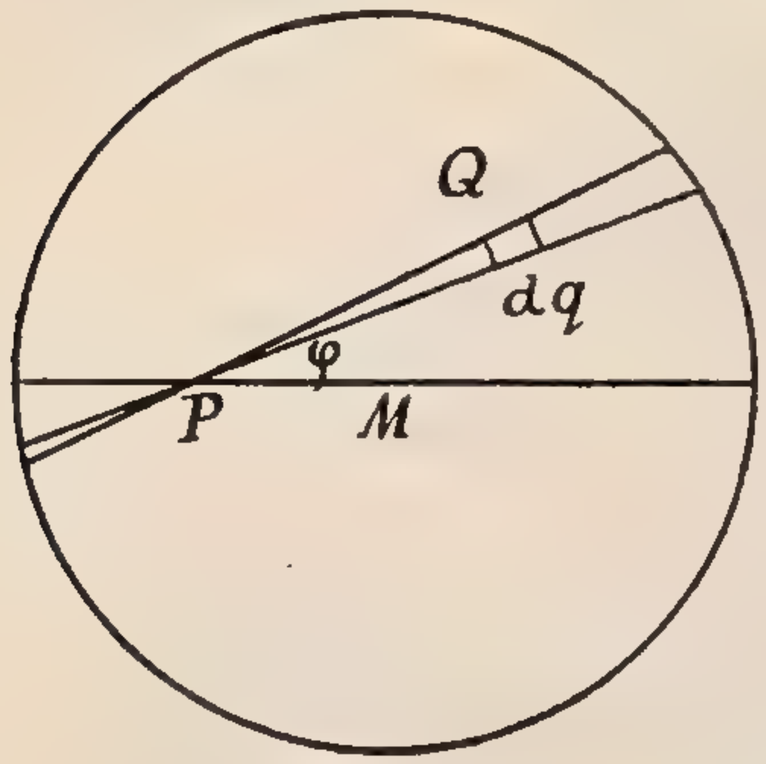
Wir haben dann folgendes Resultat:

Wir finden die Erhebung der gestörten Geoidflächen über die ungestörten, wenn wir das Potential der störenden Massen durch die mittlere Beschleunigung an der Erdoberfläche dividiren[1].

Es ist unsere weitere Aufgabe, die Potentiale der störenden Massen zu berechnen. Diese sind 3 Cylinder mit gekrümmter Basis. Da dieselbe im Vergleich zur ganzen Erdoberfläche sehr klein ist, so können wir von ihrer Krümmung absehen, d. h. die Grundfläche als eben betrachten. Eine weitere Vereinfachung begehen wir, wie schon gesagt, darin, dass wir die Masse der Cylinder auf ihre Grundfläche condensiren. Wir betrachten sie also als ebene Flächenscheiben, die mit Masse von bestimmter Dichtigkeit belegt sind. — Die Fehler, die hierdurch begangen werden, sind unbedeutend. (Ihre genaue

[1] Zuerst abgeleitet von Bruns in seiner Schrift: „Die Figur der Erde." Die hier gegebene Ableitung rührt von Helmert her.

Berechnung siehe bei HELMERT a. a. O. Bd. II. S. 319 ff.) Es sei M der Mittelpunkt einer ebenen Kreisscheibe, die mit einer Masse belegt sei, deren Dichte μ ist. Der Radius der Scheibe sei a. Wir wollen das Potential für einen inneren Punkt P berechnen: Wir legen durch P den Durchmesser P M und ziehen zwei benachbarte Strahlen, die den Winkel $d\varphi$ einschliessen. Wenn wir $PQ = \varrho$ setzen, so erhalten wir für dq, das Flächen element, den Ausdruck:



$$dq = \varrho\, d\varphi\, d\varrho.$$

Es wird also das Potential:

$$v_i = k^2 \mu \int\int d\varrho\, d\varphi = k^2 \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} s\, d\varphi$$

wenn wir die durch den Punkt P gehende Sehne mit s bezeichnen und k^2 eine Constante bedeutet. Nennen wir P M z, so wird

$$s^2 = 4(a^2 - z^2 \sin^2 \varphi)$$

und somit:

$$v_i = 4 k^2 \mu a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2} \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

Bezeichnet man das ganze elliptische Integral zweiter Gattung mit E, so wird

$$v_i = 4 k^2 \mu a \quad E\left(\frac{z}{a}\right)$$

In ähnlicher Weise finden wir das Potential für einen äusseren Punkt in der Ebene des Kreises. Wir erhalten durch dieselben Betrachtungen:

$$v_a = 4 k^2 \mu a \int_0^{\Phi} \sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2} \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

Hier bedeutet Φ den Winkel, den die Tangente vom Punkt P aus mit dem Durchmesser bildet. Die Grenze des Integrals hängt daher noch von der Grösse z ab. Um dieses zu vermeiden, führen wir die Substitution ein:

$$\sin \psi = \frac{z}{a} \sin \varphi.$$

dann wird:

$$v_a = 4k^2 \frac{a^2}{z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \psi \, d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{z^2} \sin^2 \psi}}.$$

Vermöge der Identität:

$$\cos^2 \psi = 1 - \frac{z^2}{a^2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \sin^2 \psi \right) \right\}$$

erhalten wir endlich:

$$v_a = 4k^2 \mu z \left\{ E\left(\frac{a}{z}\right) - \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) K\left(\frac{a}{z}\right) \right\}.$$

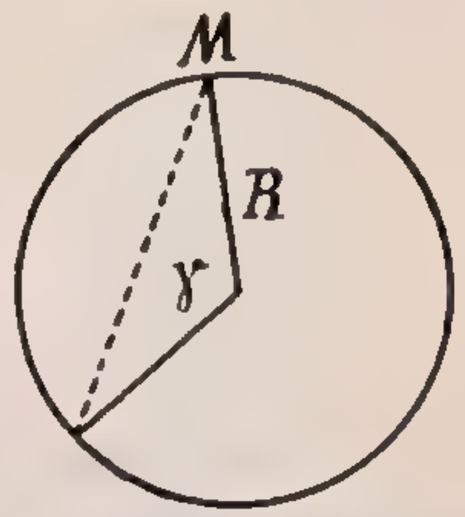
$K\left(\frac{a}{z}\right)$ bedeutet das ganze elliptische Integral erster Gattung. Bezeichnen wir schliesslich den Ausdruck:

$$E\left(\frac{a}{z}\right) - \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) K\left(\frac{a}{z}\right) \text{ mit } H\left(\frac{a}{z}\right),$$

so wird:

$$v_a = 4k^2 \mu z \, H\left(\frac{a}{z}\right).$$

Die Anwendung der letzten Formel beschränkt sich auf Punkte der Erdoberfläche, die in der Nähe des Kreisrandes liegen, da nur für diese die Krümmung der Erde vernachlässigt werden kann. Bis zu welcher Entfernung vom Mittelpunkt die Formel gebraucht werden darf, muss eine besondere Untersuchung lehren. Wir leiten zuerst eine Formel für solche äussere Punkte ab, deren Entfernung vom Mittelpunkt des Kreises einen bestimmten, später zu ermittelnden Abstand überschreitet. Für solche Punkte können wir ohne bedeutenden Fehler annehmen, dass die Masse des Cylinders in seinem Mittelpunkt concentrirt ist. Diese hat die Grösse $\mu a^2 \pi$.



Durchschnitt durch die Erde.

Da die Entfernung vom Mittelpunkt des Cylinders gleich $2R \sin \frac{\gamma'}{2}$ ist, so erhalten wir:

$$v'_a = \frac{\mu a^2 \pi}{2R \sin \frac{\gamma'}{2}}$$

Aus den soeben abgeleiteten Formeln für v erhalten wir die entsprechenden Erhebungen der gestörten Geoidfläche, indem wir jede einzelne durch die mittlere Beschleunigung g_m dividiren. g_m ist $= -\left(\frac{d\mathfrak{E}}{dr}\right)_{r=R}$, wenn $\mathfrak{E}$ das Potential der Erdkugel bedeutet.

$\mathfrak{E}$ hat für einen Punkt im Innern, dessen Abstand vom Mittelpunkt $= r$ ist, den Werth:

$$\mathfrak{E} = 2 k^2 \pi \Theta_m \left(R^2 - \frac{1}{3} r^2 \right)$$

dieses giebt

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{4}{3} k^2 \pi \Theta_m r.$$

Demgemäss erhält g_m den Werth:

$$g m = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R.$$

Führen wir die Division durch, so erhalten wir die Erhebungen:

$$h_i = \frac{3 \mu a}{\Theta_m \pi R} E\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$h_a = \frac{3 \mu z}{\Theta_m \pi R} H\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$h'_a = \frac{3 \mu a^2}{8 \Theta_m R^2 \sin \frac{\gamma}{2}}$$

Nennen wir Θ die Dichte des Eises, D seine Mächtigkeit, so wird $\mu = D \Theta$, und wir erhalten die definitiven Formeln:

$$\text{I. } h_i = \frac{3 \Theta}{\Theta_m} \frac{a D}{\pi R} E\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$\text{II. } h_a = \frac{3 \Theta}{\Theta_m} \frac{z D}{\pi R} H\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$\text{III. } h'_a = \frac{3 \Theta}{8 \Theta_m} \frac{a^2 D}{R^2 \sin \frac{\gamma}{2}}$$

Die erste Formel gilt für Punkte innerhalb des Cylinders, die zweite für Randpunkte ausserhalb in der Ebene des Kreises, die dritte endlich für Punkte, deren Winkelabstand vom Mittelpunkt des Cylinders eine gewisse Grösse überschreitet.

Wir müssen nun untersuchen, bis zu welcher Entfernung vom Rande des Cylinders wir die Formel II gebrauchen dürfen. Zu diesem Zwecke suchen wir die allgemeine Form für das Potential eine Kreisscheibe auf. Wir sehen bei dieser Untersuchung wiederum von der Krümmung der Scheibe ab. Wir denken uns also, eine ebene Kreisscheibe mit dem Radius a berühre eine Kugel (Radius R). Wir wollen das Potential der Kreisscheibe für Punkte ausserhalb, insbesondere für Punkte der Kugeloberfläche bestimmen. Wir geben die Entwicklung des Potentials in Kugelfunctionen und wenden zu diesem Zweck einen Satz an, der das Potential eines Rotationskörpers bestimmen lehrt, wenn man den Potentialwerth längs der

Rotationsachse kennt[1]. Es sei P irgend ein Punkt auf der Rotationsachse, durch die Entfernung r von einem festen Punkte auf der Achse bestimmt; ferner sei U der Potentialwerth in diesem Punkt, gegeben durch eine convergente Reihe nach Potenzen von r.

Also $$U = a_0 + \frac{b_0}{r} + a_1 r + \frac{b_1}{r^2} + a_2 r^2 + \frac{b^2}{r^3} + \ldots$$

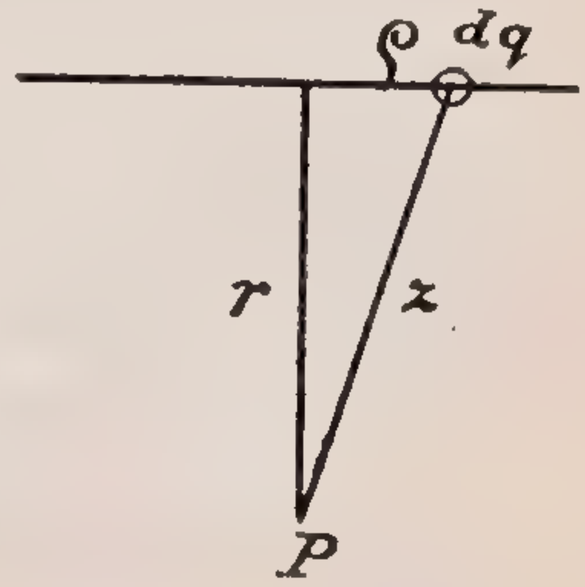
Wollen wir hieraus den Potentialwerth für irgend einen Punkt P herleiten, der durch die Coordinaten r und ϑ bestimmt ist (ϑ der Winkel, den der Radius r mit der Rotationsachse macht), so müssen wir die Glieder der Reihe U mit gewissen Functionen Q_0 Q_1 Q_2 von ϑ multipliciren, die wir als Coefficienten der Potenzen von e erhalten, wenn wir den Ausdruck $(1 - 2 e \cos \vartheta + e^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach Potenzen von e entwickeln. Wir finden so für V den Ausdruck:

$$V = a_0 + \frac{b_0}{r} + \left(a_1 r + \frac{b_1}{r^2}\right) Q_1 + \left(a_2 r^2 + \frac{b_2}{r^3}\right) Q_2 + \ldots$$

Diese Bestimmung von V gilt natürlich nur, solange die Reihe convergent ist.

Wollen wir diesen Satz auf unseren Fall anwenden, so müssen wir zuerst das Potential der Kreisscheibe für Punkte ihrer Achse bestimmen.

Die Entfernung des Punktes P vom Mittelpunkt der Scheibe sei r, von einem Element d q der Scheibe z dessen Entfernung vom Mittelpunkt ϱ. Dann ergibt sich:



$$dU = k^2 \Theta D \frac{\varrho \, d\varphi \, d\varrho}{\sqrt{r^2 + \varrho^2}}$$

Die Integration nach φ ergiebt:

$$U = 2\pi k^2 \Theta D \int_0^a \frac{\varrho \, d\varrho}{\sqrt{r^2 + \varrho^2}},$$

diejenige nach ϱ:

$$U = 2\pi k^2 \Theta D \left\{\sqrt{a^2 + r^2} - r\right\}.$$

Diesen Werth von U müssen wir nach Potenzen von r entwickeln. Da wir das Potential für Punkte bestimmen wollen, für welche $r > a$ ist, so legen wir die Entwicklung nach fallenden Potenzen von r an.

---

[1] Siehe Thomson u. Tait, Natural Philosophy. Vol. I. Part II. §. 546.

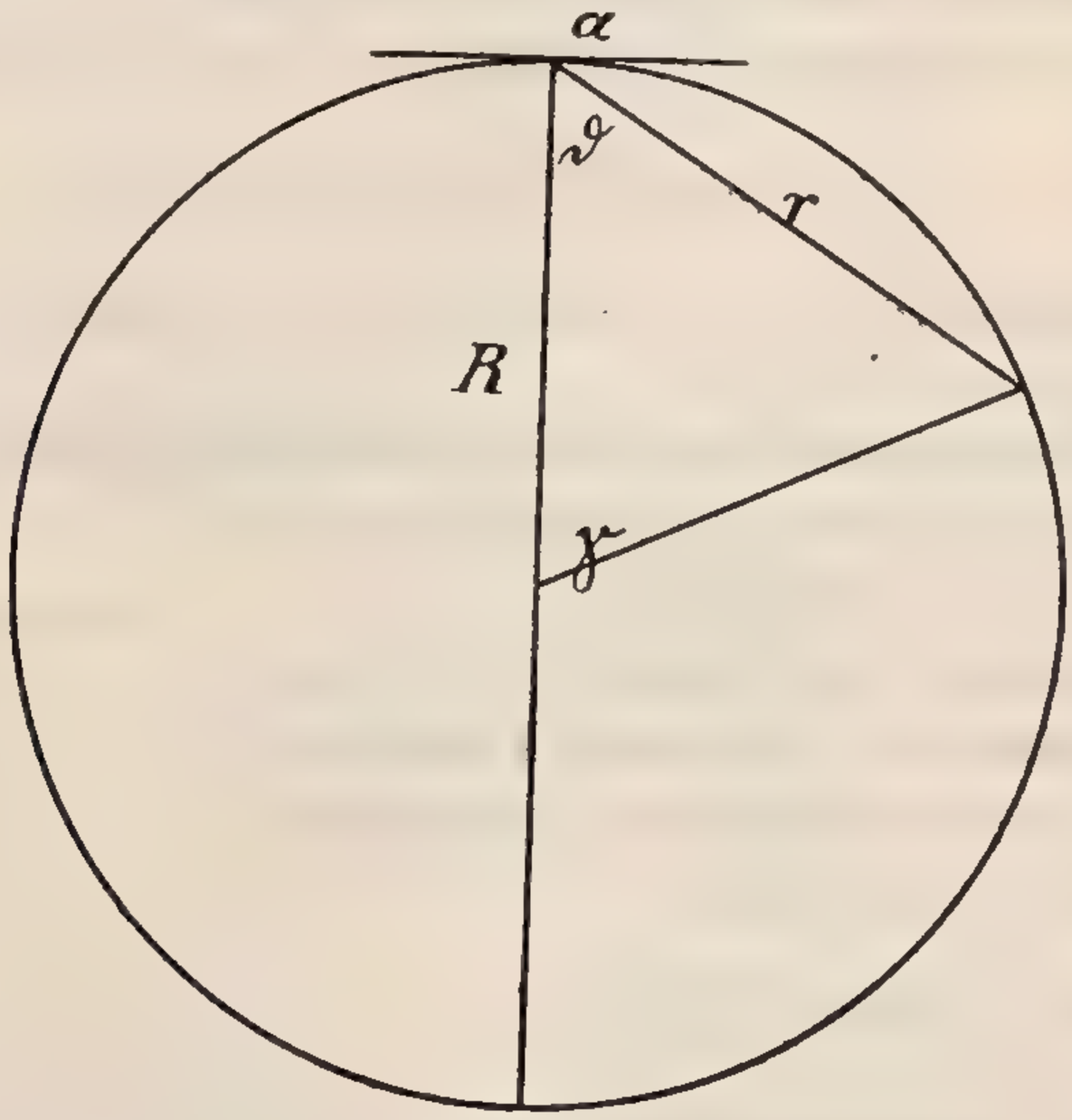
Verstehen wir unter n_k den kten Binomialcoefficienten, so erhalten wir leicht vermittelst des binomischen Lehrsatzes:

$$U = 2\pi k^2 \Theta D\left\{\frac{1}{2}\frac{a^2}{r} + \left(\frac{1}{2}\right)_2 \frac{a^4}{r^3} + \left(\frac{1}{2}\right)_3 \frac{a^6}{r^5} + \ldots\right\}$$

Bezeichnen $r\,\vartheta$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes P, dessen Verbindungslinie mit dem Mittelpunkte der Achse den Winkel ϑ einschliesst, so erhalten wir für diesen das Potential in folgender Form:

$$V = 2\pi k^2 \Theta D\left\{\frac{1}{2}\frac{a^2}{r} + \left(\frac{1}{2}\right)_2 \frac{a^4}{r^3} Q_2 + \left(\frac{1}{2}\right)_3 \frac{a^6}{r^5} Q_4 + \ldots\right\}$$

wo $Q_2\ Q_4 \ldots$ die harmonischen Flächenfunctionen (Kugelfunctionen) zweiter vierter . . . Ordnung bedeuten.



Uns interessiren hauptsächlich die Potentialwerthe in Punkten der Kugeloberfläche. Führen wir die früheren Bezeichnungen ein, so wird

$$r = 2R \sin\frac{\gamma}{2} \qquad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}.$$

Wir erhalten

$$V = 2\pi k^2 \Theta D\left\{\frac{1}{2}\frac{a^2}{2R\sin\frac{\gamma}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)_2 \frac{a^4}{(2R)^3}\frac{Q_2}{\sin^3\frac{\gamma}{2}} + \ldots\right\}$$

Nehmen wir das erste Glied vor die Klammer, dividiren durch $g_m = \frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R$, so erhalten wir die Erhebung h:

$$h = \frac{3}{8}\frac{\Theta}{\Theta_m}\frac{a^2 D}{R^2 \sin\frac{\gamma}{2}}\left\{1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)_2 \frac{a^2}{(2R)^2}\frac{Q_2}{\sin^2\frac{\gamma}{2}} + 2\left(\frac{1}{2}\right)_3 \frac{a^4}{(2R)^4}\frac{Q_4}{\sin^4\frac{\gamma}{2}} \ldots\right\}$$

Vor der Klammer steht aber nichts anderes als der Ausdruck, den wir früher mit h'_a bezeichnet haben. Führen wir diesen ein, so erhalten wir schliesslich:

$$h = h'_a \left\{ 1 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)_2 \frac{a^2}{(2R)^2} \frac{Q_2}{\sin^2 \frac{\gamma'}{2}} + 2 \left(\frac{1}{2}\right)_3 \frac{a^4}{(2R)^4} \frac{Q_4}{\sin^4 \frac{\gamma'}{2}} + \ldots \right\}$$

Für Q_2 und Q_4 haben wir die Werthe:

$$Q_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2\vartheta$$

$$Q_4 = \frac{9}{64} + \frac{20}{64} \cos 2\vartheta + \frac{35}{64} \cos 4\vartheta$$

Da ϑ gleich $\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma'}{2}$ ist, erhalten wir auch:

$$Q_2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cos \gamma'$$

$$Q_4 = \frac{9}{64} - \frac{20}{64} \cos \gamma' + \frac{35}{64} \cos 2\gamma'.$$

Die Reihe convergirt für alle Werthe von γ, die die Bedingung $\sin \frac{\gamma'}{2} > \frac{a}{2R}$ erfüllen.

Die Stärke der Convergenz hängt hauptsächlich von den Ausdrücken $\frac{Q_2}{\sin^2 \gamma_2}$ $\frac{Q_4}{\sin^4 \gamma_2}$ ab, da $\frac{a}{2R}$ in unserm Falle immer ein sehr kleiner Bruch ist. Folgende Tabelle giebt uns über die hier in Betracht kommenden Verhältnisse näheren Aufschluss. a bedeutet den Radius der Cylinderfläche in km, γ_0 in Graden, β und λ die Breite und Länge des Mittelpunkts, z endlich das Verhältniss $\frac{a}{2R} = \sin \frac{\gamma_0}{2}$.

	a	γ_0	β	λ	z
I	2740 km	24°36′	63°56′	92°9′ w.	0,2130
II	1260 „	11 19	59 39	34 3 ö.	0,0987
III	625 „	5 36	56 12	3 7 „	0,0489
IV	201 „	1,8°	52	14 „	0,0157
V	156 „	1,4°	63	8 „	0,0122

Für Cylinder Nr. I hat die Reihe Gültigkeit für Werthe von γ, die grösser als 25° sind. Wir wollen h für $\gamma = 30°$ berechnen. h′a ergibt sich rund zu 42 m, das zweite Glied der Reihe erhält den Werth + 0,07, das dritte Glied ist schon zu vernachlässigen, so dass wir für h den genauen Werth 45 m erhalten.

Wir sehen ferner, dass wir für noch grössere Werthe von γ ohne Bedenken nach der Formel III:

$$h'_a = \frac{3\Theta}{8\Theta_m} \quad \frac{a^2 D}{R^2 \sin \frac{\gamma'}{2}}$$

rechnen können. Denn für solche verschwindet der Einfluss des zweiten Reihengliedes vollkommen, wenn wir die Fehlergrenzen, die naturgemäss bei diesen Untersuchungen auftreten, ins Auge fassen. Bei dem zweiten Cylinder beginnt das Gültigkeitsgebiet mit $\gamma = 11^0$. Wir berechnen für ihn h nach der genauen Formel mit $\gamma = 19^0$, h'_a wird $= 14$ m. Das zweite Reihenglied bekommt den Werth $+ 0{,}0042$, es ist also, wenn wir nur die ganzen Meter berücksichtigen, ohne Bedeutung. Beim dritten Cylinder endlich berechnen wir h für $\gamma = 9^0$; h'_a wird ungefähr 7 m, das zweite Reihenglied erhält den Werth $+ 0{,}005$, bleibt also ebenfalls ohne Einfluss.

Das Resultat dieser Untersuchungen ist folgendes: Die Formel III $h'_a = \frac{3\,\Theta}{8\,\Theta_m} \frac{a^2 D}{R^2 \sin \frac{\gamma}{2}}$ ist schon für ziemlich nahe Entfernungen vom Mittelpunkte der Cylinder anwendbar. Beim ersten Cylinder können wir sie in einem Winkelabstande von ca. 30^0 benutzen, beim zweiten und dritten Cylinder reducirt sich diese Entfernung auf 20^0 resp. 9^0. Für den Raum vom Rande bis zu diesen Abständen haben wir die Formel II aufgestellt. Um ihre Übereinstimmung in diesem Intervall mit den genauen Formeln zu zeigen, haben wir die Erhebungen für die Maximalabstände 30^0, 19^0, 9^0 nach beiden Formeln berechnet. Da schon für diese Entfernung die Übereinstimmung eine genügende ist, können wir mit noch grösserer Sicherheit für kleine Abstände nach Formel II rechnen.

Im Innern der Cylinder endlich ist die Formel I für h_i zu benutzen.

Um die Formeln I und II wirklich auswerthen zu können, müssen wir die Functionen E und H für die verschiedenen Werthe ihrer Argumente berechnen. Diese Berechnung lehrt die Theorie der elliptischen Functionen vermittelst convergenter Reihen durchführen. Helmert [1], dem wir zum Theil in der mathematischen Ableitung dieser Resultate gefolgt sind, hat eine Tabelle zusammengestellt, die wir, soweit sie für unsere Zwecke nöthig ist, aufführen wollen.

Argument $\frac{z}{a}$	K	E	H	Argument $\frac{z}{a}$	K	E	H
0,0	1,571	1,571	0,000	0,6	1,751	1,418	0,297
0,1	1,575	1,567	0,008	0,7	1,846	1,355	0,414
0,2	1,587	1,555	0,032	0,8	1,995	1,276	0,558
0,3	1,608	1,534	0,071	0,9	2.280	1,171	0,738
0,4	1,640	1,506	0,128	1,0	∞	1,000	1,000
0,5	1,686	1,468	0,203				

[1] Helmert, Theorie der höheren Geodäsie Bd. II. S. 342.

Die Berechnung wurde für jeden einzelnen Cylinder in der Weise durchgeführt, dass nach Formel I 10 innere Höhen, nach Formel II 10 äussere Höhen für jeden Cylinder berechnet wurden. Für grössere Abstände wurde nach Formel III gerechnet. Hinzuzufügen ist, dass für eine bestimmte mittlere Zone sowohl nach Formel II als Formel III zur Controle gerechnet wurde. Formel II wurde dann bis zu dem vorhin ermittelten Abstande angewandt, für noch grössere Abstände trat Formel III in Kraft[1].

Die folgenden Tabellen geben die Erhebungen der Geoidflächen für jeden einzelnen Cylinder. Die erste Spalte enthält den Argumentwerth des elliptischen Integrals, die zweite den Abstand desjenigen Punktes auf der Erde, vom Mittelpunkte in Graden, für welchen die 4. Spalte h_i angiebt, die dritte dieselbe Grösse in Kilometern, während die 3 nächsten Spalten die Erhebungen der Geoidflächen in Metern ergeben; die erste Spalte entspricht Formel I, die beiden andern den Formeln II und III.

Tabelle für Cylinder I.

$\frac{z}{a}$	γ	z	h_i
0,0	0,0°	000 km	103
0,1	2,4	274	102
0,2	4,9	548	102
0,3	7,3	822	100
0,4	9,8	1 088	99
0,5	12,2	1 360	97
0,6	14,6	1 632	93
0,7	17,1	1 904	89
0,8	19,5	2 176	84
0,9	22,0	2 448	77
1,0	24,4	2 740	66

$\frac{a}{z}$	γ	z	h_a	h'_a	γ
0,9	27,1	3 044	55		
0,8	30,5	3 325	45	42	30°
0,7	34,9	3 914	38	32	40
0,6	40,7	4 570	32	26	50
			26	22	60
			20	19	70
			15	17	80
				15	90
				14	100
				14	110
				13	120
				13	130
				12	140
				12	150
				11	160
				11	170
				11	180

[1] Die in den Formeln vorkommenden Constanten wurden mit folgenden Werthen in Rechnung gestellt: $\Theta = 0{,}9$, $\Theta_m = 5{,}6$, $R = 6\,400\,000$ m.

Die Übereinstimmung der Formeln für h_a und h'_a geschieht ungefähr in demselben Winkelabstande, bei dem das Gültigkeitsgebiet unserer III. Formel beginnt, was vor allen Dingen die Anwendung der II. Formel für kleinere Abstände als 30° rechtfertigt.

Tabelle für Cylinder II.

$\frac{z}{a}$	γ	z	h_i
0,0	0,0°	000 km	48
0,1	1,1	126	48
0,2	2,2	252	47
0,3	3,3	378	47
0,4	4,5	504	46
0,5	5,6	630	45
0,6	6,7	756	43
0,7	7,9	882	42
0,8	9,0	1 008	39
0,9	10,1	1 134	35
1,0	11,3	1 260	30

$\frac{a}{z}$	γ	z	h_a	h'_a	
0,9	12,6	1 400 km	24		
0,8	14,0	1 580	21		
0,7	17,6	1 800	18		
0,6	19,0	2 100	14	14	19°
0,5	22,6	2 520	12	14	20
0,4	28,0	3 150	10	9	30
0,3	38,0	4 200	7	7	40
0,2	56,5	6 300	5	5	50
				5	60
				4	90
				3	120
				3	150
				3	180

Auch hier zeigt sich die Übereinstimmung der h_a und h'_a bei einem Winkelabstande, der mit unseren früheren Ermittlungen für die Anwendbarkeit der dritten Formel stimmt; h_a darf demgemäss bei der Berechnung für kleinere Abstände benutzt werden.

Tabelle für Cylinder III.

$\frac{z}{a}$	γ	z	h_i		
0,0	0,0	000 km	24		
0,1	0,6	62,2	24		
0,2	1,1	122	23		
0,3	1,7	187	23		
0,4	2,2	249	23		
0,5	2,8	311	22		
0,6	3,4	374	21		
0,7	3,9	436	20		
0,8	4,5	499	19		
0,9	5,0	560	18		
1,0	5,6	623	15		
			h_a	h'_a	γ
0,9	6,2	692	12		
0,8	7,0	778	10		
0,7	8,0	889	9		
0,6	9,2	1 038	7	6	10°
0,5	11,2	1 245	6	4	20
0,4	14,0	1 556	5	2	30
0,3	19,0	2 078	4	1	40
0,2				1	50
				1	60
				1	70
					80
					90
				0,5	180

Das Zusammenfallen der Werthe für die äusseren Erhebungen geschieht hier bei ca. 10°. Dies berechtigt uns infolge unserer früheren Erwägungen zu dem Schlusse, dass Formel II für kleine Entfernungen die richtigen Höhen liefert.

Für Cylinder IV und V, bei welchen die Erhebungen noch geringer ausfallen, sind die Rechnungen nur für den Mittelpunkt, den Rand und einen Abstand von 50° und 90° ausgeführt.

Tabelle für Cylinder IV und V.

Cylinder	Mitte	Rand	50°	90°
IV	8	5	0,12	0,06
V	6	4	0,1	0,04

Diese Tabellen enthalten die Erhebungshöhen der Geoidflächen in verschiedenen Abständen vom Mittelpunkt, entsprechend den in der Tabelle S. 15 gegebenen Argumenten der elliptischen Integrale. Die Abstände der einzelnen Punkte, für welche die Erhebungen berechnet sind, sind demnach nicht überall gleich.

Für die folgende Untersuchung brauchen wir die Erhebungen für Abstände von 10 zu 10 Grad. Um diese zu erhalten, wenden wir eine graphische Methode an. Ein grösster Kugelkreis, der durch den Mittelpunkt des Cylinders geht, wird als Abscissenlinie ausgestreckt, so dass die Bogen Abscissen werden, und auf diesem werden die berechneten Höhen in den richtigen Abständen als Ordinaten aufgetragen. Die auf diese Weise verzeichneten Profile zeigen vielleicht am besten, in welcher Weise die Geoidflächen durch die Eiscylinder gehoben werden. Die gestörten Gleichgewichtsflächen entfernen sich am meisten in dem Mittelpunkt des Cylinders von ihrem Normalstande. Diese Entfernung nimmt zuerst langsam, dann immer schneller (besonders am Rande des Cylinders) mit wachsendem Abstande vom Mittelpunkte ab, um zuletzt wieder sich sehr langsam zu vermindern, so dass die Erhebungscurve am Schluss fast eine gerade Linie wird.

Aus diesen Profilen können nun leicht die Erhebungen für Abstände von 10 zu 10 Grad entnommen werden.

Die folgende Tabelle enthält diese Bestimmungen für die drei grösseren Cylinder.

Cylinder.

γ	I	II	III	γ	I	II	III
0°	103 m	48 m	24 m	100°	14 m	4 m	1 m
10	98	35	6	110	14	3	1
20	82	14	4	120	13	3	1
30	45	9	2	130	13	3	1
40	32	7	2	140	12	3	0,7
50	26	5	1	150	12	3	0,7
60	22	5	1	160	11	3	0,6
70	19	5	1	170	11	3	0,6
80	17	4	1	180	11	3	0,6
90	15	4	1				

Diese Tabelle benutzen wir zur Berechnung eines gewissen Mittelwerths, dessen wir bedürfen, wenn wir die wirklichen Erhebungen des Meeresspiegels berechnen wollen.

Die Oberfläche des Meeres muss sowohl im gestörten als im ungestörten Zustande eine Geoidfläche sein, wenn wir von den Störungen, wie sie durch die Winde, durch die Ebbe und Fluth in ähnlichen Erscheinungen hervorgebracht werden, absehen. Es ist jedoch nicht möglich, dass dieselbe Geoidfläche, die die Oberflächenform vor Einführung der störenden Massen bestimmte, auch nachher das Meeresniveau bilde, da dann eine Volumenveränderung des Meeres eingetreten sein müsste. Dasselbe hätte sich ebenso wie die Geoidflächen überall, z. B. auch in der grössten Entfernung vom Mittelpunkt des Cylinders gehoben, das Volumen der Oceane hätte sich demgemäss vergrössert.

Wenn wir fürs Erste von der Thatsache absehen, dass die Eismassen, deren Attractionswirkungen wir betrachten, auf Kosten des Wassers der Oceane gebildet sind — ein Umstand, den wir später berücksichtigen werden — müssen wir, um die wirkliche Erhebung des Meeres zu finden, die Bedingung stellen, dass sein Volumen vor und nach der Störung durch die Eismassen dasselbe bleibe.

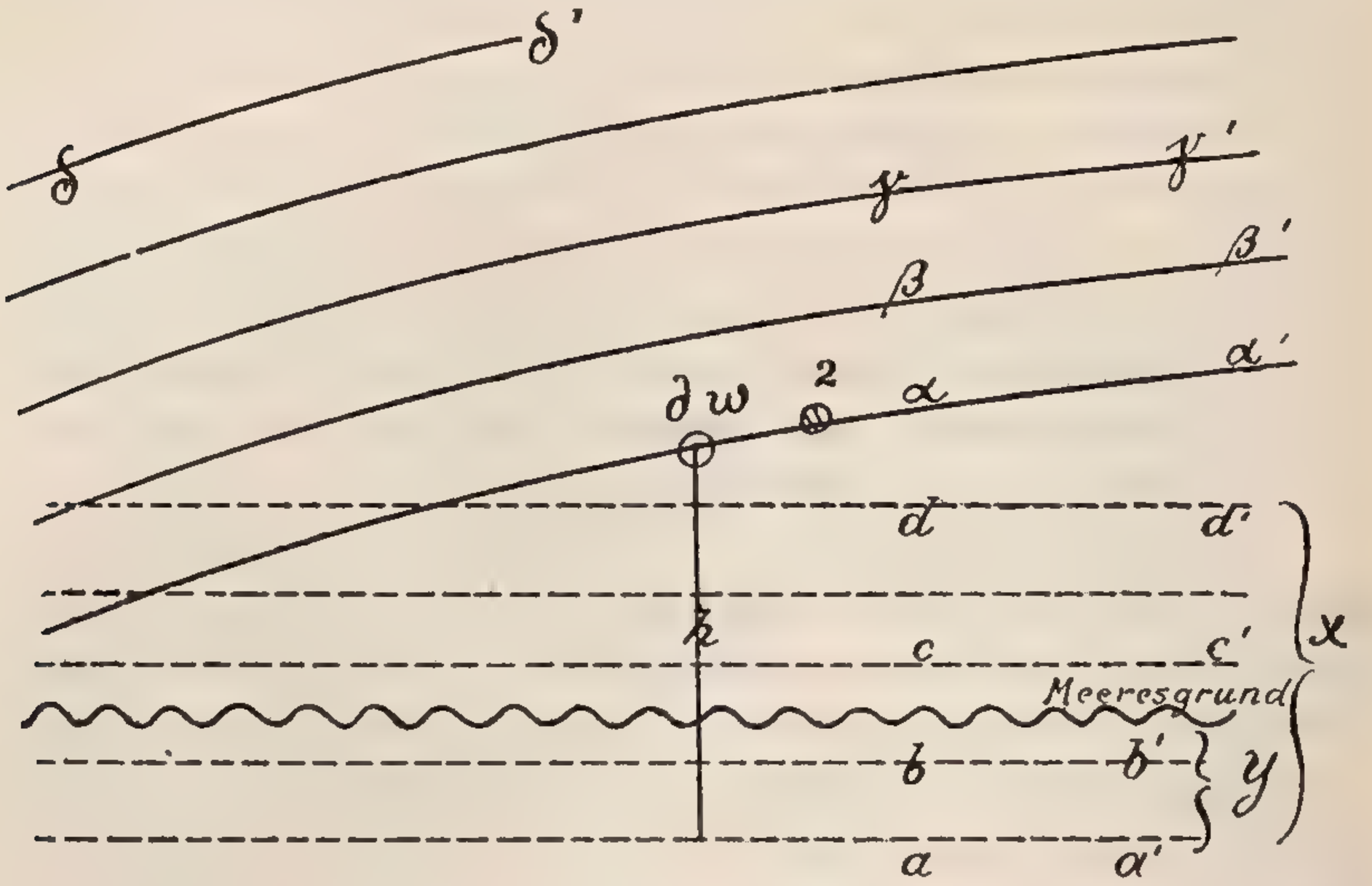
Bei den folgenden Betrachtungen machen wir die Voraussetzung, dass benachbarte Niveauflächen auch im gestörten Zustande einander parallel sind, eine Voraussetzung, die unter den Verhältnissen, unter denen wir rechnen, durchaus berechtigt[1] ist. Es seien in der Figur auf der folgenden Seite die punktirten Linien die Geoidflächen im ungestörten Zustande, die aus gezeichneten Linien dieselben Flächen, nachdem die Störung durch die anziehenden Massen eingetreten ist, die also dem Potential W entsprechen.

Die Geoidfläche a a′ werde durch die Anziehung der Eismassen in die Lage $\alpha\,\alpha'$, die Fläche b b′ in die Lage $\beta\,\beta'$ etc. gehoben. Es ist dann nicht möglich, dass zwei entsprechende Geoidflächen z. B. (d d′) ($\delta\,\delta'$) das ungestörte und gestörte Meeresniveau bilden. Denn sonst wäre eine Volumenvermehrung eingetreten, weil sich beide Flächen niemals schneiden dürfen. Bildet vielmehr (d d′) die Meeresfläche im ungestörten Zustande, so muss nach der Störung das Meer eine Niveaufläche annehmen, die d d′ schneidet. Diese Fläche sei $\alpha\,\alpha'$.

Es sei $d\omega$ ein Oberflächenelement von $\alpha\,\alpha'$, h seine Höhe über die entsprechende Fläche a a′; dann ist h dieselbe Grösse, die in unsern vorigen Formeln und Tabellen enthalten ist. Ferner sei x die Höhe

[1] Siehe die Untersuchung im Anhang.

des ungestörten Meeresspiegels (d d′), y die Höhe des Meeresgrundes über der Fläche a a′. Bedeutet dann $\mathfrak{M}$ das Areal der Oberfläche



oder auch angenähert des Bodens des Meeres, so haben wir für das Volumen des Meeres den Ausdruck:

vor der Störung $\mathfrak{V} = \mathfrak{M}x - \mathfrak{M}y$

nach der Störung $\mathfrak{V} = \int h\,d\omega - \mathfrak{M}y$, wo sich das Integral über die ganze Oberfläche des Meeres erstreckt.

Setzen wir beide Ausdrücke gleich, so erhalten wir

$$\mathfrak{M} \,.\, x = \int h\,d\omega$$

somit

$$x = \frac{\int h\,d\omega}{\mathfrak{M}}.$$

Dieser Ausdruck stellt die mittlere Erhebung der Geoidflächen über ihren ungestörten Zustand dar. $\int h\,d\omega$ kann natürlich nicht genau berechnet werden, sondern ist vermittelst mechanischer Quadratur zu bestimmen. Wir wählen zu diesem Zweck für $d\omega$ den Inhalt eines Zehngradfelds, das wir erhalten, wenn wir Meridiane und Parallelen im Abstande von 10 Grad ziehen, die den Mittelpunkt des Cylinders zum Pol haben. Nennen wir dann $\Delta\gamma$ die Breite einer Kugelzone, so ist ihre Höhe $\Delta\gamma \sin\gamma$, folglich ihre

Oberfläche $2\pi R^2 \Delta\gamma \sin\gamma$, wir erhalten demnach für die Oberfläche eines Zehngradfeldes den Ausdruck $\frac{\pi R^2 \Delta\gamma \sin\gamma}{18}$.

Wir zählen nun für jede Zone ab, wie viel Zehngradfelder wirklich auf die Oberfläche des Meeres fallen. Diese Anzahl sei n_γ. Dann erhalten wir für $\int h\, d\omega$ den Ausdruck:

$$\int h\, d\omega = \frac{\pi R^2 \Delta\gamma}{18} \Sigma h n_\gamma \sin\gamma.$$

Andererseits erhalten wir für $\mathfrak{M}$ den Ausdruck:

$$\mathfrak{M} = \frac{\pi R^2 \Delta\gamma}{18} \Sigma n_\gamma \sin\gamma,$$

so dass wir schliesslich für x bekommen:

$$x = \frac{\Sigma h n_\gamma \sin\gamma}{\Sigma n_\gamma \sin\gamma} *.$$

Die Grösse von x hängt, wie wir sehen, von der Lage und Grösse der Continente resp. der Oceane ab. Ob sie in vergangenen Zeiten dieselbe gewesen ist oder nicht, darüber können wir nur Vermuthungen anstellen. Die Genauigkeit, mit der wir x berechnen können, ist also eine sehr problematische. Unter diesen Umständen nehmen wir bei der Ausrechnung von x an, dass die einzelnen Eiscylinder mit ihrem Mittelpunkt auf dem Nordpol lagern. Diese Annahme ist um so mehr gestattet, als sie keinen bedeutenden Einfluss auf den Werth von x haben kann, da für nördliche Breite um γ und n_γ kleine Zahlen sind, die entsprechenden Glieder der Summen also wenig Gewicht haben werden.

Um den Fehler noch mehr zu vermindern, setzen wir für den ersten Cylinder $n_\gamma = 0$ von $\gamma = 0$ bis $\gamma = 20^0$, für den zweiten von $\gamma = 0$ bis 10^0, da ja in diesen Regionen kein freies Wasser sein darf. Für den ersten Cylinder finden wir dann für x den Werth: 18 m. Um den Einfluss zu erkennen, welchen die verschiedene Grösse des Meeresareals auf die Grösse x besitzt, ist x noch unter der Annahme berechnet worden, dass gar kein festes Land vorhanden sei, dass das Meer überall den festen Erdkern bedecke. So wurde für x der Werth 22 m gefunden. Wir sehen, der Unterschied ist nicht sehr bedeutend, auf jeden Fall bringt ein Schwanken in den Grenzen des festen Landes und des Meeres, wie es von der damaligen geologischen Epoche bis heute eingetreten sein kann, höch-

* Diese Formel der mechanischen Quadratur genügt für unsere Zwecke vollkommen.

stens eine Differenz von 3 m in diesem Mittelwerthe zu Stande. Wir werden im folgenden für x den Mittelwerth 20 m annehmen.

Für den zweiten Cylinder ergiebt sich in ähnlicher Weise für x der Werth: 4,3 m, wenn wir die jetzige Grösse des Weltmeeres in Betracht ziehen, dagegen der Werth $x = 5$ m, wenn wir annehmen, dass die Erde ganz mit Wasser bedeckt ist. Wir sehen, die Differenz ist wieder sehr unbedeutend. Wir wählen für x den Mittelwerth: 5 m. Für den dritten Cylinder endlich ergiebt sich $x = 1{,}2$ resp. 1,3 m, wenn wir eine allgemeine Meeresbedeckung annehmen. Bei den übrigen Cylindern fällt der Werth von x unter die Grösse eines Meters, weshalb wir ihn nicht in Rechnung bringen.

Um nun die wirklichen Erhebungen des Meeresspiegels zu finden, wie sie durch Attraction der Eismassen hervorgebracht werden, müssen wir für jeden Cylinder diese errechneten Mittelwerthe von den früher gegebenen Erhebungen der Geoidflächen abziehen.

Die folgende Tabelle giebt die wirklichen Erhebungen des Meeresspiegels, wie sie durch jeden Cylinder einzeln bewirkt werden.

(Die kleinern Cylinder sind, obwohl sich bei ihnen die Zahlen nicht geändert haben, behufs Vergleichung mit aufgeführt.)

Tabelle für die Erhebungen des Meeresspiegels.

γ	I	II	III	IV	V	γ	I	II	III	IV	V
0	83	43	23	Mitte 8	6	100	− 6	− 2	0		
10	78	39	5			110	− 6	− 2	0		
20	62	4	3	Rand 5	4	120	− 7	− 2	0		
30	25	2	1			130	− 7	− 2			
40	12	0	1			140	− 8	− 2			
50	6	0	0			150	− 8	− 2	negativ	negativ	negativ
60	2	0	0			160	− 9	− 2			
70	− 1	− 1	0			170	− 9	− 2			
80	− 3	− 1	0			180	− 9				
90	− 5	− 1	0	0,6	0,4						

Diese Tabelle ist von Wichtigkeit, als sie uns die Attractionswirkungen der Eismassen in genauen Zahlen darstellt.

Der amerikanische Eiscylinder zieht das Meer an seinem Rande ($\gamma = 24^0\ 30'$) rund 45 m empor, diese Erhöhung nimmt jedoch rasch ab, um in einer Winkelentfernung von ca. 70^0 sich in eine Senkung zu verwandeln, die langsam bis 9 m anwächst. Beim ersten europäischen Cylinder haben wir am Rande ($\gamma =$

$11^0\ 18'$) eine Erhebung des Meeres von ca. 25 m, diese Erhebung wird bald geringer und geht bei 80^0 in eine Senkung über, die ihren grössten Werth mit ungefähr 2 m erreicht. Ähnlich ist die Wirkung des zweiten europäischen Eiscylinders. An seinem Rande ($\gamma = 5^0\ 36'$) bringt er eine Anschwellung von ca. 14 m hervor, diese nimmt mit wachsendem Abstande bis zu einer Senkung ab, die aber fast unmerklich wird. Noch geringfügigere Verhältnisse bieten die nächsten Cylinder.

Bevor wir dazu übergehen, die Gesammtwirkung der Eismassen auf die Geoidflächen und den Meeresspiegel zu ermitteln, wollen wir zuerst die Ansichten untersuchen, die Penck bei Auseinandersetzung seiner Theorie über die Wirkung der Verrückung des Schwerpunkts durch die Eismassen äussert.

Aus dem, was früher gesagt ist (S. 2), scheint hervorzugehen, dass die Attractionswirkungen der Eismassen und die durch sie hervorgebrachte Schwerpunktsverschiebung ganz von einander unabhängige Resultate erzeugen, dass jede dieser Ursachen Wirkungen auf den Stand des Meeresspiegels verursachen, die sich nach dem Stand der Sache bald addiren bald subtrahiren müssen. Wir citiren zum Belege dieses noch folgende Stelle aus Penck's Werk: „Hierzu kommt noch, dass nach Croll's Voraussetzung mit den alternirenden Vergletscherungen Verschiebungen des Schwerpunkts stattfinden müssen. War also die nördliche Hemisphäre vergletschert, so wurden nach dieser hin die Meeresmassen hingezogen. Es kam hier nicht bloss zu Submersion in Folge der Attraction der Eismassen, sondern auch kraft der durch sie bewirkten Verschiebung des Gravitationscentrums“ (a. a. O. S. 66).

Dieses ist gewiss nicht der Fall. Die Potentialtheorie, die die Attraction der Eismassen berechnen lehrt, geht von der elementaren Wirkung der einzelnen Massentheilchen aufeinander aus und berücksichtigt, soweit Attractionskräfte in Betracht kommen, Alles, was irgendwie von Wirkung sein kann. Die Verrückung des Schwerpunkts, die von denselben Kräften herrührt, ist deshalb gewissermaassen nur eine secundäre Erscheinung, die erst durch die Attractionswirkungen der störenden Eismasse hervorgebracht wird. Hat man daher diese anziehenden Kräfte auf irgend einem Wege berechnet, so hat man nicht mehr nöthig, die Schwerpunktsverschiebung in Betracht zu ziehen. Umgekehrt aber ist man im Stande, wenn man anders eine genaue Auswerthung der

Attractionswirkungen nicht zu geben vermag, aus der Schwerpunktsverschiebung eine Schätzung der erwähnten Wirkung vorzunehmen, die natürlich nur roh sein kann, und keinen Vergleich mit den genaueren Resultaten aushält, die man durch Anwendung der Potentialtheorie erlangt hat. Adhémar und Croll haben sich z. B. dieser letzten Methode bedient, um die Wirkungen des Eises zu berechnen. Hat man jedoch die Attraction des Eises auf einem anderen Wege direct bestimmt, so ist man nicht mehr berechtigt, die Schwerpunktsverschiebung als unabhängiges Element in Rechnung zu setzen.

Wenn wir im folgenden trotzdem einen Weg angeben, um die Schwerpunktsverschiebung zu bestimmen, so geschieht dies einerseits deshalb, um die nöthigen Formeln aufzustellen, vermittelst welcher man die Croll'schen und Penck'schen Schätzungen über die Schwerpunktsverschiebung controlliren kann, andererseits um auf diesem bequemen Wege den Einfluss der australen Vereisung auf den Stand des Meeres in den Nordpolargegenden zu bestimmen. Wenn diese Methode auch nur angenäherte Resultate ergiebt, so können wir sie doch um so eher zu dem erwähnten Zwecke benutzen, als sie, unter den angegebenen Umständen angewandt, sicher Maximalwerthe ergiebt, was dem Gange unserer Untersuchung entspricht und der Penck'schen Theorie günstig ist.

Wir stellen die Rechnung für einen Cylinder an, der mit seinem Mittelpunkt auf dem Pol lagert. Die Bezeichnungsweise ist dieselbe wie die früher angewandte. Im folgenden werden die einfachsten Sätze der Lehre vom Schwerpunkt vorausgesetzt.

Da wir die Kugel mit den darauf lagernden Eismassen als centrobarischen Körper betrachten können, so fällt sein Attractionscentrum mit dem Trägheitsmittelpunkt zusammen. Der Trägheitsmittelpunkt eines beliebigen Systems irgend welcher materiellen Punkte ist ein Punkt, dessen Abstand von jeder beliebigen Ebene gleich ist der Summe aller Producte aus je einer Masse mit ihrem Abstande von der Ebene, dividirt durch die Summe aller Massen. Nennen wir also den Abstand des betreffenden Massenpunktes von der Ebene ϱ, die einzelnen Massen μ, so haben wir die Formel

$$\varrho = \frac{\mu_1 \varrho_1 + \mu_2 \varrho_2 + \mu_3 \varrho_3 + \cdot\cdot}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdot\cdot}$$

Unter μ_1 wollen wir die Masse der Erdkugel verstehen, die wir uns im Mittelpunkt concentrirt denken. μ_2 μ_3 sollen die Massentheilchen der Eiscylinder bedeuten. Wenn dann ϱ die Verschiebung

des Trägheitsmittelpunktes der Erdkugel bedeutet, so wird $\varrho_1 = 0$ und die übrig bleibende Summe wird ein Integral. Wir erhalten so für jeden einzelnen Cylinder:

$$\varrho = \frac{\int \varrho \, \mathrm{d}\mu}{\mathrm{M} + \mathrm{m}}$$

wo M die Masse der Erdkugel, m die des Cylinders bedeutet. Bedeutet d v ein Volumenelement, so wird $\mathrm{d}\mu = \Theta \mathrm{D} \, \mathrm{d}\mathrm{v}$. Verstehen wir unter d v die Oberfläche einer Kugelzone von der Breite $\mathrm{d}\gamma$, so erhalten wir für d v den Ausdruck:

$$\mathrm{d}\mathrm{v} = 2\pi \mathrm{R}^2 \sin\gamma \, \mathrm{d}\gamma$$

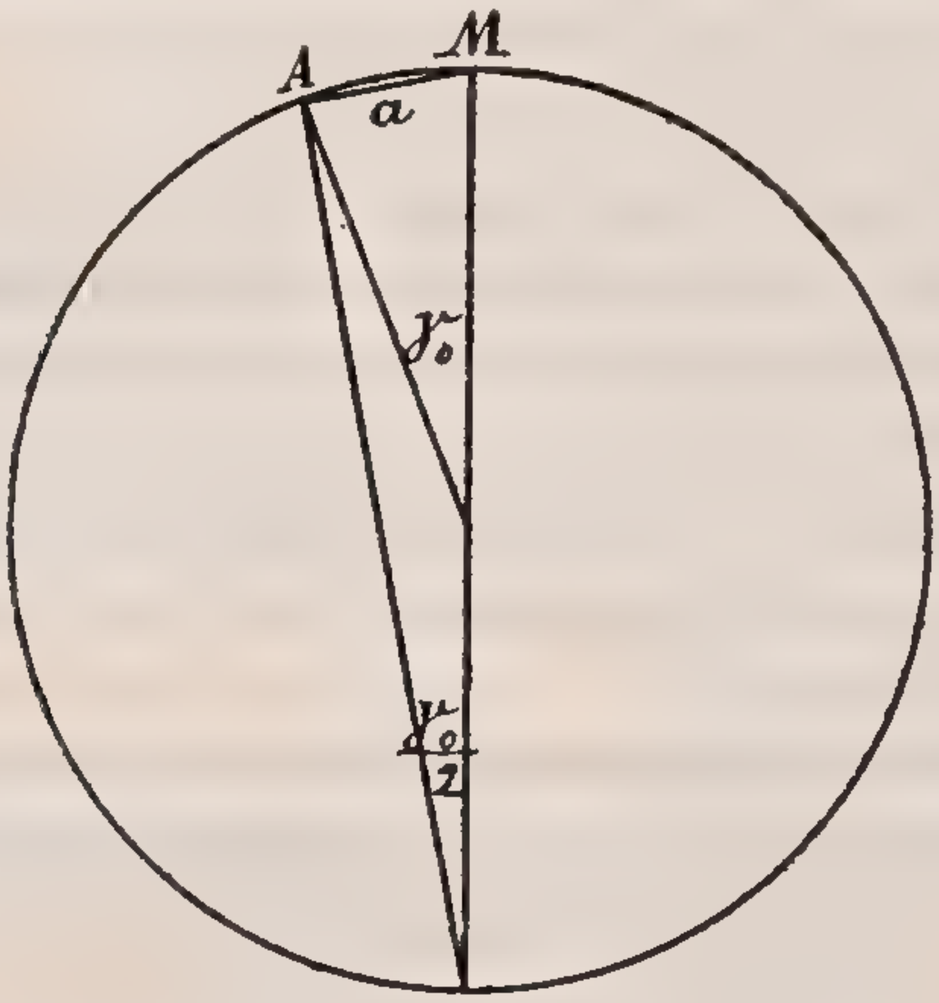
ϱ ist Abstand eines Kugelpunktes von der Aequatorebene des Cylinders, folglich gleich $\mathrm{R}\cos\gamma$.

Setzen wir dieses ein, so wird:

$$\varrho = \frac{\Theta \mathrm{D} \, \mathrm{R}^3 \pi \int_0^{\gamma_0} \sin 2\gamma \, \mathrm{d}\gamma}{\mathrm{M} + \mathrm{m}}$$

Dieses giebt integrirt:

$$\varrho = \frac{\Theta \mathrm{D} \, \mathrm{R}^3 \pi \, (1 - \cos 2\gamma_0)}{2\,(\mathrm{M} + \mathrm{m})} = \frac{\Theta \mathrm{D} \, \mathrm{R}^3 \pi \sin^2 \gamma_0}{\mathrm{M} + \mathrm{m}}$$



Wir führen den Radius des Cylinders ein, für welchen wir angenähert die Sehne AM setzen können. Es ist:

$$\mathrm{a} = 2\,\mathrm{R} \sin \frac{\gamma_0}{2}$$

Setzen wir diese Grössen in ϱ ein, so bekommen wir:

$$\varrho = \frac{\Theta\, D\, R\, a^2\, \pi \cos^2 \frac{\gamma_0}{2}}{M + m} = \frac{R\, m \cos^2 \frac{\gamma_0}{2}}{M + m}, \text{ da } m = \Theta\, D\, a^2\, \pi \text{ ist.}$$

Entwickeln wir schliesslich nach Potenzen von $\frac{m}{M}$ und vernachlässigen die höheren, so wird

$$\varrho = \frac{R\, m \cos^2 \frac{\gamma_0}{2}}{M} = \frac{R\, m}{M}\left(1 - \sin^2 \frac{\gamma_0}{2}\right)$$

Führen wir endlich für m und M die Werthe ein, so erhalten wir für die Verschiebung des Attractionscentrums:

$$\varrho = \frac{3\,\Theta}{4\,\Theta_m} \frac{a^2\, D}{R^2}\left(1 - \frac{a^2}{4\,R^2}\right)$$

Die Verschiebung der Niveaufläche erhalten wir angenähert, wenn wir um das neue Attractionscentrum eine Kugel mit R schlagen, und den Abstand dieser Kugelfläche von der früheren berechnen. Dieses giebt den Ausdruck:

$$s = \varrho \cos \gamma.$$

Die Formel lehrt, dass die grösste Anschwellung des Meeres im Mittelpunkt des Cylinders eintreten wird; im Abstande von 90° ist die Hebung = 0, für Abstände grösser als 90° wird sie negativ, um für 180° den grössten Werth der Senkung zu erreichen; sie zeigt zugleich, dass sie nur als Annäherungsformel betrachtet werden darf, da sie, wie schon früher behauptet wurde, in grösseren Winkelabständen zu grosse Werthe für die Hebungen resp. Senkungen des Meeresspiegels giebt.

Wir rechnen nach dieser Formel nur für Werthe von γ, die grösser sind als 130°, da wir durch sie den Einfluss der australen Vereisung auf den Meeresspiegel am Nordpol schätzen wollen. Für die Grösse der australen Vereisung nehmen wir ferner an, dass sich das Eis bis zum südlichen Polarkreise erstreckt habe. Dann erhalten wir für den Radius des Eiscylinders einen Werth von 23° 30′. Wir erhalten folgende Tabelle:

Abstand in Grad	Senkung des Meeres
130°	12 m
140°	15 „
150°	17 „
160°	18 „
170°	19 „
180°	19 „

Die Zahlen dieser Tabelle sind sicher zu gross. Einmal ist die Grösse der angenommenen Vereisung ohne Zweifel ein Maximal-

werth, dann aber giebt die Formel, nach welcher wir rechnen, zu grosse Zahlen. (Dieses können wir leicht durch Vergleichung mit dem amerikanischen Eiscylinder constatiren. Derselbe, der den australen an Grösse übertrifft, ergiebt im Winkelabstande von 180° nur eine Senkung von 9 m.)

Die in der Tabelle enthaltenen Zahlen müssen bei Berechnung der Gesammtwirkung in entsprechender Weise verwerthet werden. Nimmt man an, dass zur Eiszeit beide Eismassen, die nördliche und die südliche gleichzeitig existirten, so müssen die Werthe subtrahirt werden; die Erhebungen am Nordpol mindern sich.

Setzt man dagegen voraus, dass zur Eiszeit der Südpol ganz eisfrei war, so sind dieselben zu den Erhebungen, die die nördlichen Eiscylinder hervorbringen, zu addiren. Diese Rechnungen sind leicht auszuführen.

Unter den erwähnten Umständen ziehen wir es jedoch vor, bei der nun folgenden Auswerthung der Gesammtwirkung der Eismassen den Einfluss der australen Vergletscherung ganz zu vernachlässigen, da ihre Bedeutung nur eine geringe ist und leicht durch Addition resp. Subtraction einer passenden Mittelzahl, die kaum den Werth von 8 m erreichen dürfte, berücksichtigt werden kann.

Um die Gesammterhebung des Meeres zu finden, wurde nicht das Potential sämmtlicher vorhandenen Eismassen berechnet, sondern es wurde eine Methode angewandt, die es ermöglicht, aus den schon berechneten Höhen für die einzelnen Cylinder die Totalhöhe zu finden. Die Art und Weise, auf diesem Wege die Gesammtwirkung zu finden, wurde zuerst von Maxwell gelehrt.

Das weitere hierüber findet sich in seinem Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus, übers. von Weinstein, Berlin[1] 1883.

Die Grundbedingung dafür, dass dieses Verfahren angewandt werden kann, ist die, dass die Gesammtwirkung sich als die Summe der Einzelwirkungen darstellt.

Diese Forderung ist nun in unserem Falle erfüllt. Wir haben die Einzelerhebungen ausgedrückt durch einen Bruch, der im Zähler das Potential des störenden Eiscylinders, im Nenner eine constante Grösse, den mittleren Werth der Beschleunigung, hatte. Die Gesammterhebung werden wir erhalten, wenn wir das Gesammtpotential der störenden Eismassen durch dieselbe Grösse dividiren. Das Gesammtpotential ist aber nichts anders, als die Summe der einzel-

[1] I. Bd. S. 179 ff.

nen Potentiale der Eiscylinder. Daraus folgt, dass die Gesammthöhe nichts anderes ist, als die Summe der Einzelhöhen.

Die Maxwell'sche Methode besteht nun kurz darin, für jedes einzelne Potential die Niveaulinien zu zeichnen. Bringt man dann die einzelnen Systeme zum Durchschnitt, so findet man in jedem Schnittpunkt den Potentialwerth durch einfache Addition. Hat man für jeden Schnittpunkt diese Bestimmung gemacht, so verbindet man die Punkte gleichen Potentials durch Linien, die dann die Niveaulinien für das Gesammtpotential sind.

In unserem Falle wurde nun speciell folgendermaassen verfahren. Es wurden für jeden einzelnen Cylinder die Isohypsen in Entfernungen von 10 zu 10 Grad verzeichnet, die hier natürlich Kugelkreise mit dem Cylindermittelpunkt als Centrum sind. Um die betreffende Methode auch auf der Karte bequem anwenden zu können, wurde eine Projectionsart gewählt, bei der die Kreise auf der Kugel auch Kreise bleiben. Es ist dies die stereographische Projection. Die Isohypsen wurden nun für jeden Cylinder auf ein besonderes Blatt, welches durchsichtig ist, gezeichnet. Dann wurden die betreffenden Blätter in geeigneter Weise übereinander gelegt, derart, dass die Eiscylinder ihre richtigen geographischen Positionen bekamen, und nun wurde mit Hilfe dieser drei superponirten Tabellen durch einfache Addition die an jedem Durchschnittspunkte existirende Gesammterhebung bestimmt. So ergab sich eine neue Tabelle und mit Hilfe dieser wurden leicht, einfach durch Verbindung Punkte gleicher Erhebung, die Isohypsen bestimmt.

Bei der wirklichen Ausführung wurden nur die drei grössten Cylinder in Betracht gezogen, und zwar aus zwei Gründen. Einerseits ist die Erhebung durch die kleinen Cylinder so unbedeutend, dass sie sicher noch innerhalb des Bereichs der vorhandenen Fehlergrenze fällt, andererseits nimmt bei Weglassen der kleinen Cylinder die Begrenzung der europäischen Eismasse eine Gestalt an, die mit ihren Einbuchtungen im Stande sein wird, ein Bild von den Ausbeugungen zu geben, die eine unregelmässige Eisvertheilung den Geoidflächen ertheilen muss. Die beigegebene Karte, auf welcher die ermittelten Isohypsen eingezeichnet sind, ergiebt deutlich die Gestalt der gestörten Geoidfläche, und damit auch ein Bild von dem Aussehen des Meeresspiegels. Es lassen sich drei Maximalerhebungen unterscheiden. Der höchste Punkt der Fläche liegt in Nordamerika am Eingang zur Hudsonsbay; ihre Erhebung beträgt dort etwas mehr als 80 m.

Die beiden anderen höchsten Punkte liegen in Finnland und an der Südspitze von Skandinavien, wo sich der Meeresspiegel ca. 50 m über den ungestörten Zustand erhebt. Das Gefäll der Fläche zeigen uns die gezeichneten Isohypsen; es ist am stärksten am Rande des amerikanischen Inlandeises, viel weniger stark an den europäischen Küsten. Sowohl dort, als an der Küste von Nordamerika beträgt die Erhebung der ungestörten Meeresfläche nur ca. 30 bis 40 m, nicht aber, wie grösstentheils die bisherigen Schätzungen behaupten, 100 m.

Um die localen Schwankungen des nunmehrigen Meeresspiegels zu zeigen, sind mehrere Profile entworfen. Die Richtungslinie des ersten geht von dem Maximum der Erhebung in Nordamerika zu der entsprechenden Stelle in Europa. Es zeigt uns, dass für die grosse Entfernung von Amerika nach Europa die Höhenschwankungen doch recht geringe sind.

Die tiefste Stelle liegt ungefähr in der Mitte zwischen der grönländischen und europäischen Küste (etwas nach Europa hin). Dort beträgt die Erhebung ca. 38 m. Diese wächst nach Europa zu bis zur Küste um 4 m, nach Grönland hin bis zu dessen Küste um ca. 12 m. Auf eine Strecke von ca. 230 deutschen Meilen also haben die Wellen des Geoids kaum ein Ausmaass von 12 m erreicht. Die gleichen Verhältnisse zeigt ein Profil, dessen Richtungslinie parallel und nahe der skandinavischen Küste geht. Die Linien *a* und *b* im Profil geben die Orte an, wo diese Richtungslinie die norwegische Küste trifft. Für die ganze zwischen ihnen liegende Entfernung — rund wiederum 230 deutsche Meilen — erreicht die Amplitude der Schwankung noch nicht die Grösse von 10 m. Dieses sind Grössen, welche auch in der Jetztzeit wohl nur durch sehr genaue und sorgfältige Messungen aufgefunden werden könnten.

Ein drittes Profil geht durch die Einbuchtung, wie sie durch unsere Kreisbegrenzung zwischen den beiden europäischen Cylindern entsteht. Es wird annähernd den Verlauf des Meeresspiegels im Innern eines langen Meerbusens darstellen. Die Länge der Einbuchtung beträgt ungefähr 90 Meilen. Bei dem Eingange beträgt die Erhebung des Meeresspiegels ca. 39 m, das Niveau steigt langsam an, um am Ende des Busens eine Höhe von rund 46 m zu erreichen. Die Differenz zwischen den Zahlen am Anfang und Ende des Busens beträgt 7 m. Auch dieser Werth ist in Anbetracht der grossen Entfernung ein sehr unbedeutender.

Aus allen diesen Betrachtungen folgt, dass die localen Schwan-

kungen in einem und demselben Niveau, wie sie durch eine unregelmässige Eisvertheilung hervorgebracht werden, sehr gering sind, dass sie einigermaassen zu beachtende Werthe erst auf grosse Entfernungen hin erlangen.

Man könnte einwenden, dass solche localen Schwankungen auch durch Unebenheiten auf der Eisoberfläche hervorgebracht werden können und dass die bisher angeführten Rechnungen kein richtiges Resultat ergeben können, weil in ihnen die Eisoberfläche als vollkommen eben angenommen wurde. Dem ist entgegenzuhalten, dass unsere jetzige Kenntniss von der Natur solcher gewaltigen Eismassen, wie wir sie hier annehmen, darauf hindeutet, dass ihre Oberfläche im Grossen und Ganzen als Ebenen mit sanftem Gefäll, wenn auch im Einzelnen im hohen Grade uneben betrachtet werden muss. Ich verweise hier auf Schilderungen und Abbildungen in den „Meddedelser om Grönland“ und auf ähnliche Beschreibungen Nordenskjöld's. Um jedoch alle Zweifel zu heben, wollen wir eine Rechnung anstellen, die uns gestatten wird, einigermaassen die Wirkungen solcher Unregelmässigkeiten zu schätzen.

Wir wollen annehmen, auf einem der Eiscylinder sei an irgend einer Stelle seiner Oberfläche ein anderer kleinerer aufgesetzt, dessen Radius a' und dessen Dicke D' sei. Wir denken uns wieder seine Masse auf seine r Grundfläche condensirt und wollen unter diesen Bedingungen die durch ihn hervorgebrachte Erhebung der Geoidfläche berechnen. Da diese Erhebung am stärksten senkrecht unter dem Mittelpunkt sein wird, so führen wir die Rechnung nur für diesen Fall durch. Es handelt sich also darum, das Potential einer kreisförmigen Scheibe senkrecht unter ihrem Mittelpunkt zu finden. Diese Aufgabe ist bereits auf S. 12 gelöst worden. Wir fanden dort für das Potential einer Kreisscheibe in Bezug auf einen Achsenpunkt den Ausdruck:

$$u = 2\pi k^2 \Theta D' \left\{ \sqrt{a'^2 + r^2} - r \right\}.$$

r bedeutet die Entfernung des Achsenpunktes vom Mittelpunkte der Scheibe. Um die Erhebung zu finden, müssen wir mit der mittleren Beschleunigung $g_m = \frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R$ dividiren; so finden wir:

$$h = \frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \cdot \frac{D' \sqrt{a'^2 + r^2} - r}{R}$$

Um diese Formel auswerthen zu können, müssen wir bestimmte Annahmen über a', D' und r machen. Wir wollen annehmen, der Radius des aufgesetzten Eiscylinders sei der hundertste Theil von

dem des grösseren, seine Dicke D′ sei $\frac{1}{10}$ der entsprechenden. Diese Annahmen übertreffen sicher die Verhältnisse der Wirklichkeit. r ist die Entfernung von der Grundfläche des kleinen Cylinders bis zur Geoidfläche.

Da die Höhe dieser Fläche keine constante ist, sondern von Ort zu Ort sich ändert, so hängt auch der Werth von r von der Position des aufgesetzten Cylinders ab.

Für unsere Zwecke genügt es jedoch, für r eine runde Zahl zu wählen. Wir nehmen r = 900 m. Dieser Werth ist zwar auf alle Fälle etwas zu klein, jedoch wird durch diese Annahme die Wirkung des aufgesetzten Eiscylinders noch vergrössert. So wird $\frac{r}{a'}$ ein kleiner Bruch, wir können auf unsere Formel den binomischen Lehrsatz anwenden. Nach vollzogener Entwicklung nimmt sie folgende Gestalt an, wenn wir die höheren Potenzen von $\frac{r}{a'}$ vernachlässigen:

$$h = \frac{3}{2}\,\frac{\Theta\, D'}{\Theta\, m}\,\frac{a' - r + \frac{1}{2}\,\frac{r^2}{a'}}{R}$$

Setzen wir überall die Werthe ein, so finden wir für den amerikanischen Eiscylinder:

$$h = 0{,}096 \text{ m}.$$

Diese Zahl ist für unsere Verhältnisse vollkommen verschwindend. Wir haben also das Resultat:

Ist die Oberfläche des amerikanischen Eises mit Unregelmässigkeiten besetzt, deren Höhen rund $\frac{1}{10}$, deren Längendimensionen ca. $\frac{1}{100}$ der entsprechenden Grössen der ganzen Eismasse sind, so erreichen die Störungen der Geoidfläche und damit des Meeresspiegels, wie sie durch jene Unregelmässigkeiten hervorgebracht werden, noch nicht die Grösse eines Decimeters. Die Gesammtwirkung ist demgemäss auch keine bedeutende und in diesen Untersuchungen sicher zu vernachlässigen. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den europäischen Eismassen.

Die letzte Aufgabe, die uns übrig bleibt, ist, zu constatiren, ob die Erhebungen des Meeresspiegels, die wir in Tabelle S. 23 gegeben haben, ein wirkliches Anschwellen desselben über sein früheres Niveau bedeuten oder nicht. Zu diesem Zwecke müssen wir die Wassermenge berechnen, die dem Meere durch die Bildung der amerikanischen und europäischen Eismassen entzogen wurde. Das Areal, welches die von uns angenommene Vereisung bedeckt, beträgt in runder Zahl 30 000 000 km². Nehmen wir das specifische

Gewicht des Eises zu 0,9, das Meeresareal zu 374000000 km², so folgt hieraus eine allgemeine Senkung des Meeresspiegels von 77 m. Wählen wir die runde Zahl 70 m, und ziehen wir diese von den früher gegebenen Höhenzahlen ab, so erhalten wir überall, mit Ausnahme des Centrums des amerikanischen Eises, eine Senkung des Meeresspiegels, die sowohl an der europäischen als an der amerikanischen Küste ca. 30 m beträgt.

Es ist hier der Ort, von dem Einfluss zu sprechen, den die Unsicherheit der Daten, auf welchen unsere Rechnungen fussen, auf die bisher gefundenen Resultate haben kann. In Betracht kommen das Areal und die Mächtigkeit der Eisbedeckung. Das Areal, welches wir vollständig nach den Penck'schen Angaben in Rechnung gesetzt haben, scheint in jeder Beziehung einen Maximalwerth für die frühere Eisbedeckung darzustellen, so dass wir in dieser Hinsicht wohl unsere Zahlen als Maximalzahlen betrachten können.

Anders dagegen steht es mit der Mächtigkeit. Eine Eisdicke von 1000 m scheint vielen Autoren noch sehr gering für die Eisdecke der Glacialzeit zu sein. Neben Penck, der der Meinung ist, dass eine Mächtigkeit von 1000 m „sicher hinter einer Überschätzung bleibt", erwähne ich bloss Dana und Croll, von denen der erstere dem amerikanischen Eise eine Dicke von 6000 englischen Fuss zuweist.

Machen wir uns daher den Einfluss klar, den eine grössere Dicke auf unsere Resultate haben muss. Alle unsere Formeln für die Erhebungen resp. Senkungen des Meeresspiegels, mögen sie durch Attraction oder durch Schwerpunktsverschiebung, oder durch Wasserentziehung hervorgebracht werden, sind proportional der Dicke D. Nehmen wir also beispielsweise an, dass die Mächtigkeit dreimal grösser gewesen sei, so werden auch sämmtliche Werthe, die wir früher berechnet haben, dreimal grösser.

Die Form der Curven, welche die Erhebungsprofile geben, wird dagegen nicht verändert. Die Attractionswirkungen an der europäischen und amerikanischen Küste werden sich jetzt auf rund 120 m berechnen, dagegen würde durch Wasserentziehung eine allgemeine Senkung von 210 m eingetreten sein, so dass wir jetzt eine Senkung von 90 m an den Küsten hätten. Die Wellen derselben Geoidfläche werden sich im Durchschnitt ebenfalls um das dreifache vergrössern, so dass wir beispielsweise auf eine Entfernung von 230 Meilen eine Amplitudenschwankung von ca. 30 m haben würden. Diese Zahl ist in Anbetracht der grossen Entfernung fast

ebenso unbedeutend wie früher. Die Wirkungen der oberflächlichen Unregelmässigkeiten dagegen haben sich nur in geringerem Grade vermehrt, da ihre Entfernungen von der zu störenden Geoidfläche sich vergrössert haben. So beträgt beim amerikanischen Eiscylinder unter derselben Annahme für die Dicke die Erhebung nur 2 dm.

Im Allgemeinen lässt sich sagen: Die Annahme einer grösseren Mächtigkeit hat keinen Einfluss auf die allgemeinen Erscheinungen, d. h. ob Hebung oder Senkung vorhanden ist, dagegen wachsen die localen Wirkungen der Eisbedeckungen unter diesen Umständen proportional der Dicke des Eises. Bei der Geringfügigkeit dieser letzteren hat jedoch selbst eine Mächtigkeit von 3000 m nur den Einfluss, dass die Wellen desselben Geoids auf eine Entfernung von 230 m nur eine Amplitude von ca. 30 m erreichen. Oberflächliche Unregelmässigkeiten, deren Dimensionen entsprechend der Dicke vergrössert werden, haben auch dann keinen nennenswerthen Einfluss.

Wir wollen jetzt die gewonnenen Ergebnisse dazu benutzen, um die Theorie zu prüfen, die die Meeresspiegelschwankungen durch den Wechsel in der Grösse der Eisbedeckung erklären will.

Dass während des Maximums der Vereisung keine Hebung des Meeres, sondern eher eine Senkung eintrat, kann nach Penck nur dadurch erklärt werden, dass eine annähernd ebenso grosse Vereisung der Südpolarländer angenommen werden muss. Dieses wird nicht als ein Nachtheil empfunden, sondern Penck begrüsst es als ein vortheilhaftes Ergebniss seiner Theorie „aus den Senkungserscheinungen Rückschlüsse auf die Vergletscherungen machen zu können“. „Wir können,“ sagt er an einer Stelle, „auf diesem Wege Einiges zur Entscheidung der Frage beitragen, ob zur Eiszeit beide Hemisphären gleichzeitig vergletschert waren, oder nicht.“ Er zieht dann den bekannten Schluss, dass eben, um die Senkungserscheinungen zur Zeit des Maximums der Vereisung erklären zu können, man annehmen muss, „dass auf beiden Halbkugeln gleichzeitig mächtige Eisbedeckungen existirten.“ Durch eine Eisbedeckung der Nordpolarländer von 490 000 □Meilen, berechnet Penck ein allgemeines Sinken des Meeres um 65 m. Dem gegenüber setzt er ein Anschwellen durch Attraction um rund 90 m, so dass noch immer ein Steigen des Meeres von 25 m bleibt.

Dieses Steigen kann nur in ein Sinken verwandelt werden, wenn man die Wasserentziehung, die durch die Südpolarvergletscherung hervorgebracht wird, in Betracht zieht. Hierzu genügt

nicht die heute auf dem Südpol vorhandene Eismenge, wenn man auch Maximalwerthe für deren Areal und Mächtigkeit in Rechnung setzt, sondern man muss verlangen, dass diese australe Eismasse zur Eiszeit noch bedeutend vergrössert war, etwa so, dass man annimmt, „dass auf der südlichen Halbkugel ungefähr ebenso grosse Eismassen gelegen haben, wie auf der nördlichen, also doppelt so viel als heute. Unter solchen Voraussetzungen waren zur Eiszeit 4mal grössere Meerwassermengen gefesselt als heute, und dadurch wurde eine Senkung des Meeresspiegels um über 100 m bewirkt, welcher eine Hebung von 90 m durch die Attraction der Eismassen gegenübersteht. Steigen und Fallen halten sich unter dieser Annahme nicht nur die Wage, sondern das Sinken übertrifft den Betrag des Steigens, zumal auch, weil keine Verschiebung des Gravitationscentrums der Erde eintritt. Nehmen wir nun aber an, dass die Mächtigkeit der Eisbedeckung eine grössere war, dann wird auch die Differenz zwischen Fallen und Anschwellen des Meeres grösser, und zwar zu Gunsten des Fallens.“ Wir brauchen hier nicht die Frage zu thun, wo denn das Festland herkommen soll, welches diese gewaltigen Eismassen tragen müsste, brauchen auch nicht darauf hinzuweisen, dass selbst unter Annahme einer grossen Mächtigkeit die Hebungserscheinungen im Maximum kaum den Betrag von 30 m erreichen würden; unsere Rechnungen zeigen, dass alle diese Annahmen und Forderungen unnöthig sind, demgemäss auch nicht gemacht werden dürfen. Denn eine Senkung des Meeres von der Mächtigkeit, wie sie Penck durch Annahme einer gewaltigen australen Vergletscherung ausrechnet, haben wir unter allen Umständen, auch wenn wir die australe Vereisung, deren Wirkung unter allen Umständen nur gering ist, nicht in Betracht ziehen. An den Küsten sowohl von Nordamerika als von Europa, herrscht, wie wir gezeigt haben, zur Zeit des Maximums der Vereisung ein allgemeines Sinken des Meeres um ca. 30 m, das sich leicht durch die Annahme einer grösseren Mächtigkeit auf 90 m seigern lässt. Die Rechnungen sind allerdings ohne Rücksicht auf die australe Vereisung ausgeführt; jedoch selbst in dem Falle, dass sämmtliches Eis, das jetzt am Südpol existirt, dem Meere zurückgegeben wäre, träte noch kein Überfluthen des Landes am Nordpol zur Zeit des Maximums der Vereisung ein. Wir setzen hierbei das Areal der Südpolarvergletscherung auf rund 75 000 □ Meilen, indem wir nach Thomson and Tait Natural philosophy [1] eine antark-

[1] Vol. I. Part II. New ed. S. 449.

tische Landmasse annehmen, die sich von 90—80° südlicher Breite erstreckt, und mit einzelnen Halbinseln bis zum 70. Grad reicht, so dass von 80—70° noch ungefähr 20 Längengrade von Land ausgefüllt werden. Nehmen wir an, dass diese Landmasse vergletschert war, so würde das Schmelzen des darauf befindlichen Eises ein allgemeines Steigen um 10 m bewirken[1]. Ausserdem müssen noch die Attractionswirkungen in Rechnung gesetzt werden. Bei Penck werden diese durch die Methode der Schwerpunktsverschiebung geschätzt, die, wie wir früher gezeigt haben, viel zu grosse Werthe ergiebt. Während diese eine Niveauschwankung von ca. 20 m ergiebt, beträgt die wirkliche Uferverschiebung nach früheren Resultaten kaum 8 m. Das Schwinden der jetzigen Südpolarvergletscherung würde also am Nordpol eine Hebung des Meeres von 18 m bewirken. Wir können also immer noch annehmen, dass in früheren Zeiten einmal die Vergletscherung das doppelte Areal am Südpol eingenommen habe, ohne am Nordpol eine wirkliche Hebung des Meeresspiegels zur Zeit des Maximums der Vereisung durch die Annahme, dass dieses Eis in jenem Zeitpunkt vollständig abgeschmolzen war, zu erzielen.

Alle diese Erwägungen berechtigen uns zu dem Schluss, dass sich aus den Attractionswirkungen der Eismassen und aus den Hebungs- und Senkungserscheinungen keine Rückschlüsse auf das Verhältniss der australen und borealen Vergletscherungen machen lassen.

Wir wollen nun den zweiten Punkt der Attractionstheorie untersuchen, nämlich die Erklärung des Steigens des Meeresspiegels nach dem Maximum der Vergletscherung. Dass eine solche Anschwellung thatsächlich einmal stattgefunden hat, dafür die Beweise beizubringen, ist nicht unsere Aufgabe. Ich erinnere hier bloss an die Terrassen und Strandlinien in Skandinavien, an ähnliche Gebilde in Grönland und Nordamerika, die hierüber keinen Zweifel aufkommen lassen. Wir haben nach diesen früheren Spuren des Meeres eine Verschiebung der Strandlinie zu verzeichnen, die sich im Maximum sicher bis über 200 m über den jetzigen Stand des Meeres erstreckte. Die Erklärung dieser positiven Strandverschiebung sucht die Theorie, die wir hier betrachten, wiederum in zwei Hauptursachen. Zuerst wird wiederum die australe Vergletscherung zu Hilfe genommen. „Eine jede Änderung im Umfange der

[1] bei der Annahme einer Mächtigkeit von 1000 m.

australen Vergletscherung muss ja nothwendigerweise ihren Einfluss auf den Meeresspiegel haben, und vielleicht wurde die Submersion zufolge allgemeiner Attraction, welche sich an den Rückgang der beiden borealen Vereisungen knüpft, unterstützt durch ein allgemeines Anschwellen des Meeres auf der nördlichen Halbkugel, welches Anschwellen in der von Croll auseinandergesetzten Weise durch eine Minderung der australen Eismasse erzeugt wurde; vielleicht sind auch viele der recenten Hebungen in höheren Breiten der nördlichen Hemisphäre nichts Anderes, als der Ausdruck des Sinkens des Meeres zufolge des Anwachsens der australen Vereisung.“ Der zweite Punkt, welcher zur Erklärung der Erscheinungen noch herbeigezogen wird, ist schon in den soeben citirten Worten Penck's angedeutet. Das Schmelzen der Eismassen muss nämlich eine doppelte Wirkung auf den Stand des Oceans haben. Einmal wird dem Meere Wasser zugeführt, wodurch sein Spiegel erhöht wird, dann aber wird durch denselben Process die Eismasse kleiner, und hierdurch wird die Attraction derselben vermindert. Wenn man sich nun vorstellt, um in den Gedanken der hier betrachteten Theorie zu bleiben, dass die Gravitationswirkungen im Ganzen weniger durch das Schmelzen beeinflusst werden, dass sie insbesondere noch bestehen, wenn schon ein bedeutender Theil der Eismasse verschwunden und dem Meere als Wasser zurückgegeben ist, so ist der Fall denkbar, dass nicht nur ein allgemeines Steigen des Meeres, sondern gerade in der Nähe des schmelzenden Eises ein besonders hoher Wasserstand eintritt, da sich hier noch die beiden Wirkungen summiren werden.

Wir wollen uns zuerst mit diesem zweiten Punkt, der Wirkung des Abschmelzens, näher beschäftigen, und auf das Heranziehen der australen Vergletscherung erst nachher zu sprechen kommen.

Um den Einfluss der Abschmelzung genau auswerthen zu können, muss man im Stande sein, die Gestaltsveränderungen anzugeben, die ein Körper durch Schmelzen seiner Masse erleidet. Dies ist natürlich in unserem Falle nicht möglich, da wir die Bedingungen, unter welchen das Abschmelzen stattfand, höchstens ganz im allgemeinen angeben können, indem wir uns auf Beobachtungen beziehen, die auf das Abschmelzen der jetzigen Gletscher Bezug haben. Folgende Betrachtungen über das Abschmelzen einer cylindrischen Eismasse werden jedoch auf alle Fälle von Nutzen sein. Wir nehmen an, dass wir es allein mit dem amerikanischen

Eiscylinder zu thun haben, der die Dicke D und am Grundkreis den Radius a haben soll. Als Grundlage für diese Betrachtungen stellen wir die Voraussetzung auf, dass während des Schmelzens stets die Cylinderform erhalten bleibt. Fraglich ist dann noch, in welchem Verhältniss sich die Mächtigkeit D und der Radius des Grundkreises a ändert. Wir können folgende Fälle unterscheiden: Durch das Abschmelzen ändert sich entweder nur a, oder D, oder endlich alle beiden Grössen. — Den ersten Fall können wir wohl aus unseren Betrachtungen ausschliessen. — Das Abschmelzen wird da am meisten geschehen, wo die Eismasse am stärksten den Einwirkungen der Temperatur, der Atmosphäre etc. ausgesetzt ist, das ist an ihrer Oberfläche. Es ist unter diesen Umständen nicht denkbar, dass die Vereisung sich nur zusammenzieht, dagegen ihre volle Mächtigkeit bewahrt. Den zweiten Fall, dass die Mächtigkeit während des Schmelzens stets abnimmt, dagegen das Areal der Vergletscherung erhalten bleibt, wollen wir aus unseren Betrachtungen nicht ganz ausschliessen, wiewohl seine Verwirklichung wohl kaum anzunehmen ist, da ja die Mächtigkeit eben die Grösse der Vereisung bestimmt. Der dritte Fall endlich, wo D und a zu gleicher Zeit abnehmen, entspricht am meisten der Wirklichkeit. Wir werden jedoch Annahmen machen müssen, in welchem Verhältniss diese beiderseitige Abnahme geschieht.

Erledigen wir zuerst den Fall, in welchem die Mächtigkeit allein abnimmt, dagegen das Areal constant bleibt. Da bei dieser Untersuchung nur die Hebungserscheinungen am Rande der Eismasse in Betracht kommen, so setzen wir in Formel I S. 11 $z = a$, wodurch sie die einfache Gestalt bekommt:

$$h = \frac{3\,\Theta}{\Theta_m}\,\frac{a\,D}{\pi\,R}.$$

Um die wirkliche Hebung resp. Senkung des Meeresspiegels zu erhalten, müssen wir von h einmal die mittlere Erhebung der Geoidflächen abziehen, die wir früher mit x bezeichneten, und für welche wir den Ausdruck aufstellten: $x = \int \frac{h\,d\,\omega}{\mathfrak{M}}$, dann aber noch die Höhe x', um welche das Meer erniedrigt wird, wenn wir die Wassermenge in Anschlag bringen, welche zur Eisbildung verbraucht wird. In x müssen wir für h den Ausdruck III auf S. 11 einsetzen, so dass es proportional $a^2\,D$ wird; x' berechnet sich durch die Formel $x' = \frac{\Theta\,D\,A}{\mathfrak{M}}$, wo A das Areal der Vergletscherung, $\mathfrak{M}$ die Meeresoberfläche bedeutet. Es ist also ebenfalls proportional

der Dicke und dem Quadrate von a, da wir $A = a^2 \pi$ zu setzen haben. Berücksichtigen wir dieses alles, so erhalten wir für die Hebung resp. Senkung des Meeresspiegels den Ausdruck:

$$h = \varkappa a D - \lambda a^2 D,$$

wo $\varkappa$ und λ Constanten sind.

In dem Fall, den wir jetzt betrachten, ändert sich nur D durch Schmelzen. Wir wollen annehmen, es sei durch diesen Process allmählig im Laufe der Zeit in D x übergegangen, wo x jetzt einen echten Bruch bedeutet. Dann geht h über in:

$$h_x = \varkappa a D x - \lambda a^2 D X.$$

h ist Anfangs, d. h. solange noch keine Schmelzung eingetreten ist, negativ, da wir zu dieser Zeit eine Senkung des Meeresspiegels haben. Diese Senkung kann nun unter den hier betrachteten Umständen nie in eine Hebung übergehen, da h mit abnehmendem x nicht sein Zeichen wechseln kann, sondern erst für $x = 0$ ebenfalls $= 0$ wird.

Wir haben also das Resultat: Geschieht das Schwinden der Vergletscherung so, dass sich nur die Mächtigkeit, nicht aber das Areal derselben mindert, so kann eine von Anfang an vorhandene Senkung des Meeres nie in eine Hebung desselben übergehen.

Im zweiten Falle, der mehr der Wirklichkeit entspricht, sollen sich der Radius des Grundkreises und die Dicke D gleichzeitig vermindern. In welchem Verhältniss dieses geschieht, darüber können nur Vermuthungen aufgestellt werden. Als erste Ursache der Verminderung eines Gletschergebiets wird sich wohl stets eine geringere Niederschlagsmenge in dem Ausstrahlungscentrum herausstellen, die dann eine weniger intensive Speisung der gewaltigen Eisströme, die das ganze Eisareal durchziehen, bedingt. Dieses hat dann nicht nur ein Zurückweichen der Gletscherzungen, sondern auch ein starkes oberflächliches Abschmelzen zur Folge, da die Ablationsproducte nicht mehr oder doch nur mangelhaft ersetzt werden. Beobachtungen an jetzigen Gletschern mögen dies einigermassen erhärten. Der Rhonegletscher wich während seiner Rückgangsperiode vom Jahre 1850—80 um 854 m zurück, verminderte aber auch seine Dicke, wie durch Beobachtungen früherer Seitenmoränen constatirt wurde, unterhalb des grossen Absturzes um ca. 120 m. Der Obersulzbachgletscher weist eine Längenabnahme von 500 m mit einer durchschnittlichen Dickenabnahme von ca. 50—80 m auf, während der Unteraargletscher bei einer Längenabnahme von nur 60—88 m, eine solche der Dicke von 47 m zeigt.

Wenn diese Zahlen auch keinen absoluten Beweis erbringen können, so macht die Überlegung, dass eben diejenige Dimension, die am meisten der Ablation ausgesetzt ist, auch am meisten verlieren muss, die Thatsache wahrscheinlich, dass wir uns die Verminderung der Mächtigkeit in einem stärkeren Grade zu denken haben, als diejenige der Längendimension. Um jedoch auf alle Fälle sicher zu gehen, werden wir folgende zwei Annahmen machen. Erstens wollen wir voraussetzen, dass sich die Dicke des Eises und das Areal der Vergletscherung in demselben Maasse ändert. Diese Annahme bringt zum Ausdruck, dass sich die Mächtigkeit schneller mindert als die Längendimension. Zweitens werden wir festsetzen, dass die Abnahme der Länge und der Dicke im selben Verhältniss stattfinden.

Wir hatten gefunden:

$$h = \varkappa a D - \lambda A^2 D.$$

Wir nehmen wiederum an, dass sich D im Laufe der Zeit in Dx verwandelt habe, dann hat sich entsprechend unserer ersten Voraussetzung die Fläche $a^2 \pi$ in $a^2 \pi x$ verwandelt, so dass wir für a die Abnahme durch $a\sqrt{x}$ ausdrücken. h geht unter diesen Umständen über in:

$$h = \varkappa a D x \sqrt{x} - \lambda a^2 D x^2.$$

Um die Werthe für $\varkappa a D$ und $\lambda a^2 D$ zu finden, bedenke man, dass das erste Glied für $x = 1$ die Erhebung der Geoidfläche, das zweite Glied die Depression hervorgebracht durch die Wasserentziehung nach Subtraction der mittleren Erhebung bedeutet. Es ist also für den amerikanischen Eiscylinder rund:

$$\varkappa a D = 60\,m \qquad \lambda a^2 D = 90\,m.$$

Unsere Gleichung wird jetzt

$$h_x = 60 x \sqrt{x} - 90 x^2.$$

Dieser Ausdruck wird 0, erstens für $x = 0$, was dem vollständigen Schwinden der Vergletscherung entspricht, zweitens für $x = 0{,}44$. Das heisst, wenn die Mächtigkeit und das Areal der Vergletscherung auf 0,44 ihres ursprünglichen Betrages gesunken ist, geht die Senkung allmählig in eine Hebung über. Den Maximalbetrag der Hebung finden wir, wenn wir nach x differenziren und den Ausdruck $= 0$ setzen.

Das giebt für x den Werth: 0,25.

Die Hebung, die diesem Werthe entspricht, berechnet sich auf 1,8 m und dieses ist die Maximalhebung, die eintreten kann.

Nehmen wir ferner an, dass Längen- und Dickendimensionen im gleichen Maasse schwinden, so haben wir für a und D nach dem Verlauf einer gewissen Zeit ax und Dx zu setzen. Dieses giebt für hx den Ausdruck:

$$h_x = z\,a\,D\,x^2 - \lambda\,a^2\,D\,x^3 \text{ oder}$$

$$h_x = 60\,x^2 - 90\,x^3.$$

Dieser Ausdruck wird gleich 0 für $x = \frac{2}{3}$. Die Maximalhebung tritt ein für $x = \frac{4}{9}$ und beträgt rund 4 m.

Fassen wir diese Schlussfolgerungen zusammen, so erhalten wir folgendes Resultat:

Die allgemeine Senkung des Meeres an der amerikanischen Küste, die zur Zeit des Maximums der Vereisung rund einen Betrag von 30 m erreicht, schwindet durch Abschmelzen der Eismassen allmählig, wie es auch die Natur der Sache verlangt. Diese Senkung kann sogar an den Küsten in ein leichtes Ansteigen des Meeres übergehen, dessen grösster Werth jedoch im günstigsten Falle nur einen Betrag von 4 m erreicht. Das Schwanken des Meeresspiegels also, welches durch die gewaltige Vereisung Nordamerikas und deren späteres Abschmelzen verursacht wurde, beträgt im günstigsten Falle etwas mehr als 30 m, wahrscheinlich aber ist es geringer. Ähnliche Erwägungen gelten auch für die Vereisung Europas. Ich unterlasse es jedoch, die bezügliche Rechnung auszuführen, da sich die Zahlen für diesen Fall noch geringer herausstellen. Hervorzuheben ist ferner, dass das Anschwellen des Meeres, wie es fast überall nach dem Maximum der Vereisung eingetreten ist und durch viele Spuren sich auch jetzt noch dem Beobachter sichtbar macht, in keiner Weise durch die nördlichen Eismassen selbst erklärt werden kann. Im Allgemeinen muss nach unseren Rechnungen während der ganzen Eiszeit eine Senkung des Meeres existirt haben, wenn man nicht etwa die vorhin errechneten 4 m als Hebung gegen uns ins Feld führen will.

Sind wir unter diesen Umständen berechtigt, die australe Vereisung zu Hilfe zu nehmen, um das nothwendige Ansteigen des Meeres zu erzielen? Auf keine Weise! Wir hatten schon mehrfach Gelegenheit darauf hinzuweisen, wie bedeutend man die Wirkung der australen Vereisung überschätzt, wenn diese durch die Methode der Schwerpunktsverschiebung berechnet wird. Richtig

berechnet, war 8 m Niveauschwankung[1] das günstigste, was man erzielen konnte, eine Zahl, die gar nicht in Betracht kommt. Aber auch vom allgemeinen Standpunkt halten wir es nicht für richtig, einer Hypothese, die sich bei fast allen Anwendungen als unfähig erweist, dadurch Lebenskraft zu geben, dass man eine andere Hypothese zu Hilfe ruft, die erst durch die erste entstanden ist. Hier gelten mit vollem Recht trotz des Widerspruchs Penck's (S. 32) die Worte von Dechen's: „Es scheint nicht, dass dem Fortschritte der Wissenschaften mit solch' aufeinandergehäuften Hypothesen irgendwie gedient sein kann, sie führen sie in ein Gebiet, wo sorgfältige Beobachtung mit deren rechtmässiger Induction aufhört."

Wir wenden uns zu dem letzten Punkt, den wir noch zu betrachten haben, zur Erklärung der localen Schwankungen in ein und demselben Meeresniveau. Die Thatsachen, die sich hierauf beziehen, sind wohl im allgemeinen bekannt. Um die Sachlage zu charakterisiren, citire ich einige Worte aus Penck's Schrift: „Die Schwankungen des Meeresspiegels".

„Es sind keineswegs alle Länder der nördlichen Halbkugel in gleichem Maasse untergetaucht gewesen; lagen Skandinavien und Schottland in Bezug auf den Meeresspiegel bis 200 m tiefer als heute, so kann ein Gleiches nicht von den benachbarten Orkneys, Schettlands und Faröer behauptet werden. Es heben vielmehr verschiedene Beobachter den Mangel mariner Terrassen auf diesen Inseln hervor, indem sie erwähnen, dass ihnen solche bei ihrer Durchforschung der Insel nicht hätten entgehen können." „Zu alledem kommt noch Eines, nämlich, dass man nicht bloss Spuren eines einzigen früheren Meeresniveaus findet, sondern von vielen verschiedenen, welche nicht einmal an benachbarten Punkten einander entsprechen." An einer anderen Stelle heisst es: „In Norwegen findet man allenthalben in alten Strandlinien und Terrassen die Spuren früherer Meeresniveaus, und es ist nicht dem geringsten Zweifel ausgesetzt, dass diese alten Meeresniveaus in den verschiedenen Theilen des Landes einander nicht entsprechen. Bei Christiania sieht man die Spuren des Meeres in 200 m Höhe, in der Umgebung von Bergen steigen sie nur bis 130 m an, um sich bei Trondhjem wieder bis 200 m zu erheben." — „Es haben also augenscheinlich Verschiebungen des Meeresstrandes in verschiedener Intensität in den einzelnen Landestheilen stattgefunden."

---

[1] ohne Berücksichtigung der Wassermenge, die zur Eisbildung verwandt wurde; mit Berücksichtigung dieses Factors ungefähr 20 m.

Alle diese Erscheinungen wurden stets als Beweis gegen eine Schwankung des Meeresspiegels angeführt, erst Penck glaubt die darauf gestützten Einwände hinfällig zu machen, indem er auf die Attractionswirkungen und ihre localen Verschiedenheiten hinweist. „Wenn man die Hebungserscheinungen in Skandinavien“, sagt er an einer Stelle, „zurückführt auf ein Sinken des Meeres, welches infolge der durch das Schwinden der Eisbedeckung geminderten Attraction des Landes eintrat, dann werden die angedeuteten Phänomene ebenso leicht verständlich, wie ursächlich begründbar. Sie werden dann der Ausdruck des unregelmässigen Sinkens des Meeres, bedingt durch den unregelmässigen Rückgang der Vergletscherung.“ — „Ein jedes periodisches Zurückziehen der Vergletscherung bedingt eine periodische Abnahme der Attraction des Landes und damit ein periodisches Sinken des Meeres. Aber es gieng die Vereisung nicht bloss stufenweise zurück, sondern auch mit local wechselnder Intensität, so dass das durch sie bedingte Sinken des Meeres sich nicht überall in gleichem Maasse äusserte.“ „In dem periodisch erfolgenden, local in seiner Intensität wechselnden Rückzuge der Vereisung liegt eine Quelle zu einem periodisch geschehenden unregelmässigen Sinken des Meeres, welches wohl die angedeuteten Erscheinungen zu erklären vermag, und die verschiedenen einzelnen Terrassen und Strandlinien sammt deren so vielen Variationen unterworfenen Höhen zu begründen im Stande ist.“

Wir können diesen Erklärungsversuchen angesichts unserer Formeln und Profile durchaus nicht zustimmen. Zuerst bedingt der Rückgang der Vereisung nicht ein Sinken des Meeres, sondern ein Steigen; das Sinken tritt erst spät, nachdem die Vereisung sich bedeutend zurückgezogen hat, ein, wie von uns früher entwickelt ist.

Jedoch wollen wir hierauf nicht näher eingehen, da die Sache bereits erledigt ist, sondern zu dem Hauptpunkt, den localen Schwankungen übergehen. Dass die localen Schwankungen, die hier erklärt werden sollen, bedeutende Beträge erreichen, geht aus den vorhin citirten Stellen hervor. Auf der Strecke von Christiania bis Trondhjem haben wir Differenzen constatirt, die den Betrag von 70 m erreichten. Auf den Orkneys, Faröern, Schettland sind gar keine Spuren höheren Meeresstandes, während in dem südlichen Schottland solche bis 200 m heraufreichen. Für Amerika führt Dana in seinem Manual of Geology höhere Differenzen an, deren Werthe noch viel bedeutender sind. Unsere Karte, welche ein Bild von der Geoidfläche während des Maximums der Ver-

gletscherung geben soll, zeigt uns Wellen, deren Amplitude eine viel geringere ist. 12 m war das Maximum im Höhenunterschied von der Küste Grönlands zu der Skandinaviens, kaum 10 m erreichte derselbe Betrag vom Nordpunkt zum Südpunkt der skandinavischen Küste. Dieses sind Entfernungen, welche die Abstände, für welche die Höhenunterschiede durch Beobachtung constatirt sind, bedeutend übertreffen. Die Wellen, welche unsere Geoidfläche zeigt, reichen auch nicht annähernd an die zu erklärenden Differenzen im Meeresstrande heran. Um dieses noch deutlicher zu machen, wollen wir näher auf die schon oft erwähnten schiefen Strandlinien im Altenfjorde eingehen. Nach dem französischen Physiker Bravais existiren in dem genannten Fjorde Strandlinien, die deutlich landeinwärts ansteigen. Penck erklärt diese Thatsache durch die Form der Niveauflächen, die eben zur Eiszeit durch die Gravitation der Eismassen sich landeinwärts hoben. Penck selbst giebt folgende Zahlen: Die obere Strandlinie senkt sich von 68 m Höhe im Altenfjorde bis auf 28 m. Das macht auf 100 km 40 m. Die untere dagegen von 67 m auf 41 m. Das macht auf 100 km 13 m. Wir sehen, das Gefäll ist bei beiden Linien ganz ungleichmässig, weshalb Penck die Beobachtungen bei der oberen Linie für falsch hält. Warum gerade diese Beobachtungen verworfen werden, ist nicht recht einzusehen. Halten wir uns jedoch nur an die Angaben, welche die untere Linie betreffen, dann haben wir für diese auf 100 km ein Gefäll, welches unsere Geoidfläche erst auf eine Entfernung von 230 deutschen Meilen zeigt. Am besten zeigt uns den Einfluss, welchen ein Fjord auf das Gefäll des Meeresspiegels haben muss, unser drittes Profil. Dieses ist durch den Raum zwischen den beiden europäischen Eiscylindern gelegt, der ungefähr die Gestalt eines langen Meerbusens besitzt. Da haben wir auf eine Länge von 675 km ein Ansteigen von 7 m, also Zahlen, welche auch nicht annähernd an die beobachteten Höhenunterschiede von Bravais heranreichen.

Eine andere Eisvertheilung, die vielleicht unregelmässiger angelegt wäre, als die von uns angenommene, würde zwar eine Geoidfläche liefern, die noch welliger gebaut wäre, als die hier betrachtete. Jedoch die Amplitude der Wellen würde im Durchschnitt immer dieselbe bleiben. Solche intensive Schwankungen im Meeresspiegel können nur durch plötzliche Höhenschwankungen auf der Eisoberfläche erklärt werden, die bis zum Betrage von 1000 m heranreichen müssen. Wie wenig Einfluss kleine Unregelmässig-

keiten der Oberfläche haben, ist ja im vorigen gezeigt worden. Wir glauben jedoch nicht, dass die Oberfläche des Inlandeises solche gewaltige Differenzen in den Höhen, zumal auf so kurze Entfernungen, gezeigt habe, seine Natur müsste denn eine ganz andere gewesen sein, als sie uns die Verhältnisse der Jetztzeit darbieten. Dazu kommt noch Eins. Der höchste Stand des Meeres fand nach allem Vorhergehenden nicht zur Zeit des Maximums der Vergletscherung, sondern erst bedeutend später statt. Es musste sich dann durch das Schmelzen nicht nur die allgemeine Mächtigkeit der Eisdecke gemindert, sondern auch ihre localen Ungleichheiten vielfach ausgeglichen haben.

Wir halten es demnach nicht für möglich, dass die Unregelmässigkeit der Vertheilung und der Mächtigkeit der Eisdecke im Stande ist, die Höhendifferenzen, welche bei den Spuren früherer Meeresniveaus zu Tage treten, zu erklären.

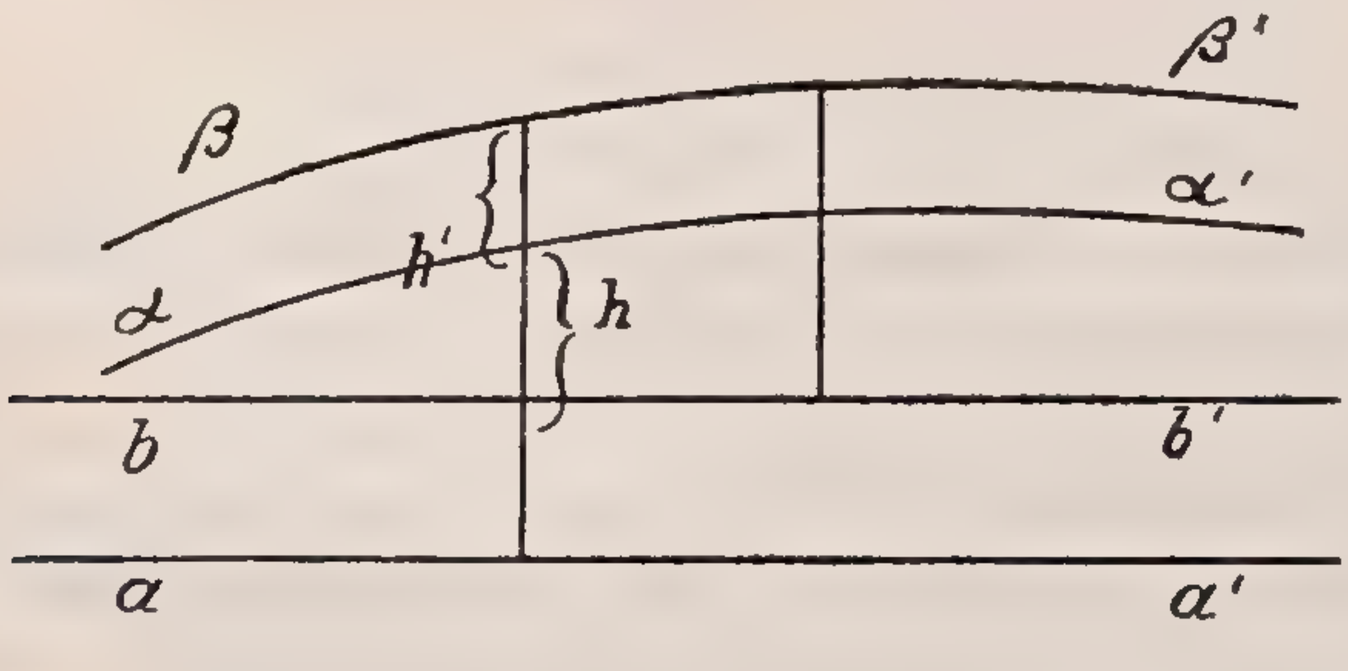
So ist es denn auf Grund der vorgelegten Rechnungen und Untersuchungen unsere Überzeugung. dass die Gravitationstheorie — wenn wir mit diesem Namen die vielfachen Versuche zusammen fassen dürfen, welche durch Variationen in der Intensität der Schwerkraft die Schwankungen des Meeresspiegels erklären wollen — in keiner Weise im Stande ist, den vorhandenen Thatsachen gerecht zu werden. Weder gelingt es ihr, überhaupt das durchschnittliche Ausmaass dieser Schwankungen zu erklären, noch vermag sie die Hauptschwierigkeit, welche die früheren Erklärungsversuche hinfällig machte, die localen Differenzen in der Intensität der Schwankung, in einer einigermaassen genügenden Weise aus dem Wege zu räumen. Wir halten daher auch diesen Erklärungsversuch der Meeresspiegelschwankungen für gescheitert.

Anhang.

Wir geben zum Schluss einige Untersuchungen, die sich eng an die Arbeit anschliessen, indem sie dazu dienen sollen, etwaige Einwände, die man gegen einige gemachte Voraussetzungen erheben könnte, aus dem Wege zu räumen. Wir haben sie nicht in die eigentliche Arbeit eingefügt, sondern geben sie hier in dem Anhange, weil sie einerseits durch ihren mathematischen Inhalt nicht von allgemeinem Interesse sind, andererseits die Entwicklung und die Übersicht erschwert hätten.

1. Parallelismus benachbarter Niveauflächen.

Auf Seite 21 wurde die Voraussetzung gemacht, dass die Niveauflächen auch im gestörten Zustande einander parallel seien, wenn ihre gegenseitige Entfernung nicht zu gross ist (wenn sie benachbart sind). Wir wollen die Berechtigung dieser Annahme hier nachweisen. Die ungestörten Niveauflächen bilden nach den von uns gemachten Voraussetzungen Kugelflächen, die in der beistehenden Figur mit (a a′) (b b′) etc. bezeichnet seien. Die gestörten Geoidflächen, die die Buchstaben ($\alpha\,\alpha'$) ($\beta\,\beta'$) tragen, mögen sich über die entsprechenden ungestörten (a a′) (b b′) um die Höhen h resp. h′ erheben.



Wäre nun genau überall $h = h'$, so würden, da die Kugelflächen parallel sind, auch die gestörten Geoidflächen parallel sein. Wir werden im folgenden zeigen, dass die Differenz $h' - h$ unter den von uns betrachteten Umständen zu vernachlässigen ist, d. h. weit unter die Fehlergrenze für die ermittelten Erhebungen des Meeresspiegels fällt.

Die Kugelfläche (a a′) habe den Radius R, die Kugelfläche b b′ den Halbmesser $R + H$, wo H eine Grösse ist, die im Vergleich zu R sehr klein ist. h ist eine Function des Winkelabstandes vom Mittelpunkte des störenden Kreiscylinders und vom Radius R der Kugelfläche. Da h′ sich in denselben Winkelabständen vom Mittelpunkt des Cylinders befinden und nur einer andern Kugelfläche (b b′) angehören soll, so finden wir h′, indem wir unter Anwendung der Taylor'schen Reihe nach Potenzen von H entwickeln. Wir erhalten

$$h' = h + \frac{dh}{dR} \cdot H,$$

wenn wir die höheren Potenzen vernachlässigen.

Es ist $h = \frac{v}{g_m}$, wo v die Potentialfunction des störenden Eiscylinders, g_m die auf der Kugelfläche (a a′) herrschende mittlere Beschleunigung bedeutet. Wir erhalten durch Differentiation:

$$\frac{dh}{dR} = \frac{1}{g_m}\frac{dv}{dR} - \frac{v}{g_m^2}\frac{dg_m}{dR}.$$

Bedeutet M die Masse der Erde, so hat g_m den Werth:

$$g_m = \frac{M k^2}{R^2}$$

und

$$\frac{dg_m}{dR} = -\frac{2 M k^2}{R^3}.$$

Folglich wird:

$$\frac{v}{g_m^2}\frac{dg_m}{dR} = -\frac{2v}{g_m R} = -\frac{2h}{R}$$

und wir erhalten:

$$\frac{dh}{dR} = \frac{1}{g_m}\frac{dv}{dR} + \frac{2h}{R}.$$

Die Function v haben wir ausserhalb des Cylinders durch eine Reihe ausgedrückt, die für alle Werthe von $r > a$ convergirte. Ihre Convergenz hörte nur für die Werthe $r = a$ auf. Diese Entwicklung findet sich auf Seite 14.

Wir wollen eine ähnliche Reihe für innere Punkte der Cylinder ableiten, für welche die Beziehung $r < a$ gilt. Die Methode ist genau dieselbe, wie auf Seite 12 ff. Wir hatten für das Potential einer Kreisscheibe in Bezug auf einen Achsenpunkt gefunden:

$$U = 2\pi k^2 \Theta D \left\{ \sqrt{a^2 + r^2} - r \right\}.$$

Diesen Ausdruck müssen wir nun nicht wie früher nach Potenzen von $\frac{a}{r}$, sondern von $\frac{r}{a}$ entwickeln. So erhalten wir:

$$U = 2\pi k^2 \Theta D \left\{ -r + a + \frac{1}{2}\frac{r^2}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{r^4}{r^3} + \dots \right\}.$$

Bedeutet nun ϑ die Winkelentfernung vom Mittelpunkt des störenden Cylinders Q_ν und die Kugelfunction νten Ranges mit dem Argument ϑ, so erhalten wir für den Werth des Potentials im Punkte ϑ/r den Ausdruck

$$v_i = 2\pi k^2 \Theta D \left\{ -r Q_1 + a + \frac{1}{2}\frac{r^2}{a} Q_2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{r^4}{a^3} Q_4 + \dots \right\}$$

gültig für $r < a$.

Für einen äusseren Punkt hatten wir gefunden:

$$v_a = 2\pi k^2 \Theta D \left\{ \frac{1}{2}\frac{a^2}{r} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{a^4}{r^3} Q_2 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{a^6}{r^5} Q_4 - \dots \right\}.$$

Wir müssen die Werthe von v betrachten, die zu Punkten gehören, die auf der Kugelfläche mit dem Radius R liegen. Zu diesem Zweck setzen wir $r = 2R\sin\frac{\gamma}{2}$, wo $\frac{\gamma}{2} = R - \vartheta$ den Winkelstand des Kugelradius von der Cylinderachse bedeutet. So erhalten wir

$$v_i = 2\pi k^2 \Theta D \left\{ -2R\sin\frac{\gamma}{2} Q_1 + a + 2\frac{R^2}{a}\sin^2\frac{\gamma}{2} Q_2 - 2\frac{R^4}{a^3}\sin^4\frac{\gamma}{2} Q_4 + \dots \right\}$$

$$v_a = 2\pi k^2 \Theta D \left\{ \frac{1}{4}\frac{a^2}{R\sin\frac{\gamma}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\frac{a^4}{R^3}\frac{Q_2}{\sin^3\frac{\gamma}{2}} + \dots \right\}$$

Differenziren wir beide Formeln nach R, so ergiebt sich[1]:

$$\frac{dv_i}{dR} = 2\pi k^2 \Theta D \left\{ -2\sin\frac{\gamma}{2} Q_1 + 4\frac{R}{a}\sin^2\frac{\gamma}{2} Q_2 + \dots \right\}$$

$$\frac{dv_a}{dR} = 2\pi k^2 \Theta D \left\{ -\frac{1}{4}\frac{a^2}{R^2\sin\frac{\gamma}{2}} + \frac{1.1.3}{2.4.8}\frac{a^4}{R^4}\frac{Q_2}{\sin^3\frac{\gamma}{2}} - \dots \right\}$$

Lassen wir die unsichere Randregion innen und aussen des Cylinders beiseite, für welche diese Betrachtungen ausdrücklich nicht gelten sollen, so hat in beiden Formeln der Factor in der Klammer einen Werth, der zwischen ± 1 liegt. Der absolute Werth von $\frac{dv}{dR}$, auf welchen es hier allein ankommt, ist also sicher kleiner als $2\pi k^2 \Theta D$. Wir finden dementsprechend die Ungleichheit:

$$-\frac{dh}{dR} < \frac{1}{g_m} 2\pi k^2 \Theta D - \frac{2h}{R}.$$

[1] Beide Formeln gelten nur unter der Voraussetzung, dass die Kreisscheibe die Kugel vom Radius $R + h$ berührt. Wenn man sich erinnert, dass die Kreisscheibe mit condensirter Masse als Ersatz für einen Cylinder von 1000 m Mächtigkeit dient, wird man diese vereinfachende Annahme zulassen.

Setzen wir für g_m den Werth $\frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R$, so erhalten wir:

$$-\frac{dh}{dR} < \frac{3}{2}\frac{\Theta D}{\Theta_m R} - \frac{2h}{R}.$$

Führen wir die Erhebung der Geoidfläche im Mittelpunkt des Cylinders ein:

$$h_0 = \frac{3}{2}\frac{\Theta D \,.\, a}{\Theta_m R},$$

so geht die Ungleichheit über in

$$-\frac{dh}{dR} < \frac{h_0}{a} - \frac{2h}{R}.$$

Setzen wir dieses in die Gleichung für $h - h'$ ein, so erhalten wir

$$h - h' < H\left(\frac{h_0}{a} - \frac{2h}{R}\right)$$

Vernachlässigen wir $\frac{2h}{R}$ (wodurch wir die Grenze zu hoch erhalten), so wird schliesslich

$$h' - h < \frac{H \,.\, h_0}{a}$$

mit dem Zusatze: diese Ungleichheit gilt für sämmtliche Punkte in der Nähe der Erdoberfläche mit Ausnahme derjenigen, die in der Nähe des Cylinderrandes liegen. Setzen wir $H = h^0 = 100$ m, was annähernd mit dem Verhältnisse stimmt, und $a = 2\,716\,000$ m, so wird

$$h' - h < 4 \text{ mm}.$$

Ähnliche Zahlen ergeben sich für die andern Eiscylinder.

Der Werth, den wir so erhalten haben, liegt sicher weit unter der bei unseren Betrachtungen vorhandenen Fehlergrenze, wir müssen ihn gleich 0 setzen. Übrig bleibt noch die Untersuchung für Punkte, die in der Nähe des Cylinderrandes liegen. Wenn wir uns jedoch erinnern, dass wir die Voraussetzung vom Parallelismus der Niveauflächen lediglich zur Volumenbestimmung einer von ihnen eingeschlossenen Wassermasse gemacht haben, können wir von einem näheren Eingehen auf diesen Punkt absehen. Denn ob für das verschwindende Volumen, dem die Randpunkte angehören, unsere Voraussetzung richtig ist, oder nicht, bleibt vollkommen gleichgültig.

2. Berücksichtigung des störenden Einflusses, den die verschobene Wasserhülle auf ihre eigene Gestalt ausüben muss.

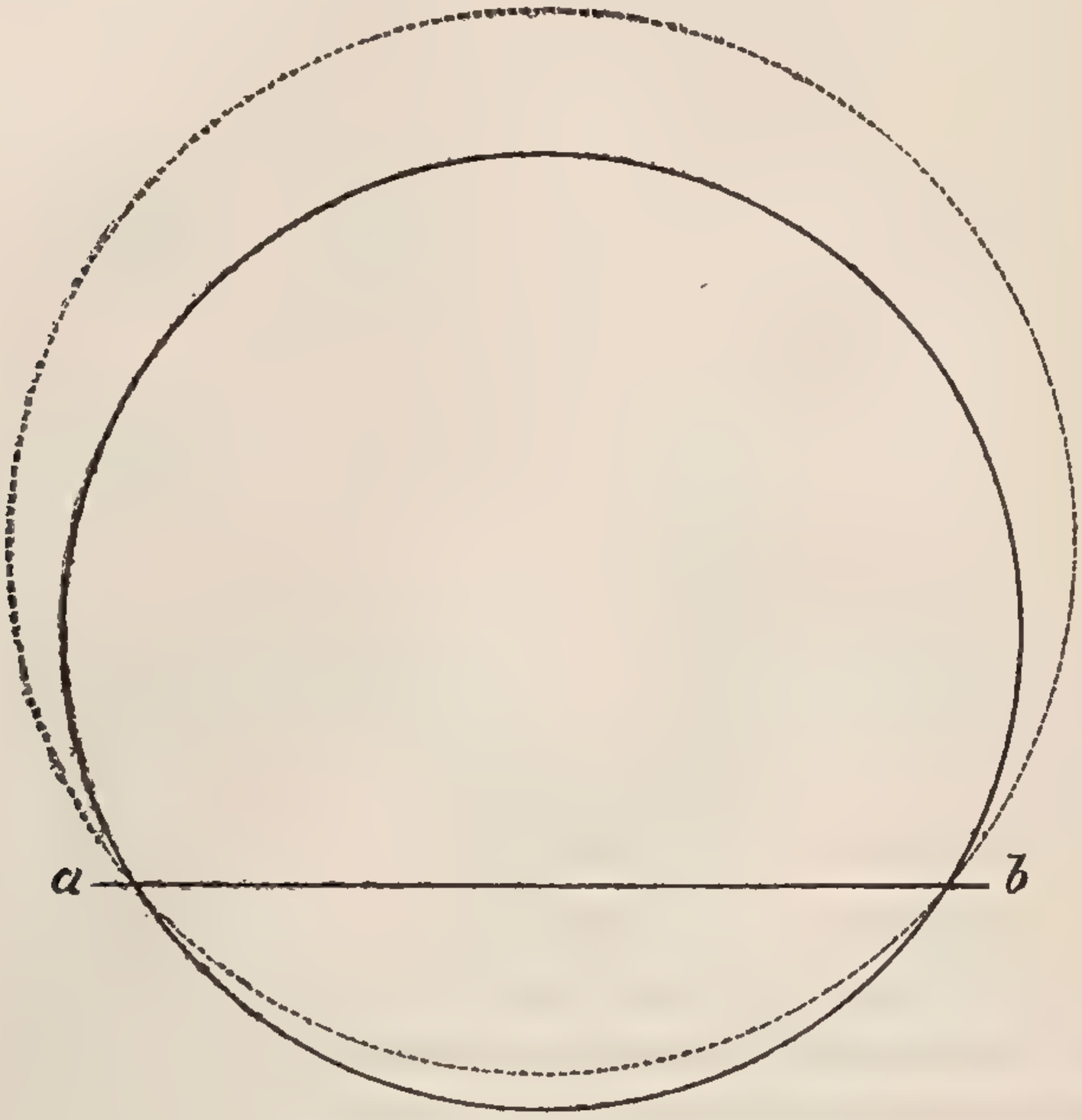
Der Haupteinwand, der gegen die von uns angewandte Methode, die störende Wirkung der Eismassen zu bestimmen, gemacht werden kann, ist der, dass nicht alle Factoren, die auf die

Lage der Geoidflächen einwirken können, in Rechnung gesetzt sind. Die Verschiebung des Meeresspiegels nämlich, wie wir sie in unserer Arbeit festgestellt haben, bringt selbst eine Gleichgewichtsstörung hervor, die ihrerseits zu einer neuen Verschiebung der Geoidflächen Veranlassung giebt.

Die Berücksichtigung auch dieses Umstandes gehört zu den schwierigsten Problemen der Analyse, und erst die Entwicklung der Lehre von den Kugelfunctionen ermöglichte es, in gewissen einfachen Fällen eine Lösung zu geben. Die Anwendung dieser Methode wäre jedoch für unsere Zwecke zu weitläufig, da die ganze Natur unserer Untersuchung nur angenäherte Resultate verlangt. Wir schlagen deshalb einen andern Weg ein, um die störende Einwirkung der Wassermassen zu schätzen. Wir denken uns die Wasserhülle selbst fürs Erste ohne Einwirkung, so dass bei der Verschiebung der Geoidflächen einzig und allein die störenden Eiscylinder in Betracht kommen. Der Meeresspiegel nimmt dann die in der Arbeit angegebene Gestalt an. Nachdem dieser Zustand der Wasseroberfläche eingetreten ist, denken wir uns das Potential des auf diese Weise geformten Wasserkörpers berechnet und seine störenden Wirkungen auf die Geoidflächen in Anschlag gebracht. Dieselben werden auf diese Weise eine neue Verschiebung erleiden, die selbst wiederum eine neue Oberfläche der Wasserhülle bedingt. So entsteht ein neuer Wasserkörper, dessen Oberfläche von der wirklichen Gleichgewichtslage zwar noch abweichen, jedoch derselben bedeutend näher liegen wird, als die erste errechnete Störungslage. Mit diesem neuen Wasserkörper verfährt man auf dieselbe Weise wie vorhin. Man berechnet sein Potential und dessen Einwirkung auf die Verschiebung der Geoidflächen. Dieser weiteren Verschiebung entspricht ein neuer Meeresspiegel, der sich dem wirklichen, dem vollständigen Gleichgewicht entsprechenden noch mehr nähern wird, als der frühere. In derselben Weise fährt man fort, bis man den wirklichen Stand der Meeresoberfläche erreicht.

Die thatsächliche Anwendung dieser Methode würde nun, wenn sie genau ausgeführt würde, zu sehr schwierigen Untersuchungen führen. Denn da sie in Wirklichkeit eine unendliche Folge von Operationen verlangt, so müsste gezeigt werden, dass die unendliche Reihe von Werthen, die den einzelnen Stadien der Rechnung entsprechen, sich einer festen Grenze nähern und diese Grenze müsste bestimmt werden. Beide Untersuchungen würden ohne Zweifel zu schwierigen mathematischen Problemen Veranlassung geben.

In unserem Falle jedoch, wo es sich nur um Schätzungen des störenden Einflusses handeln soll, stellen sich Vereinfachungen ein. Wir werden nämlich zeigen, dass schon die erste der angedeuteten Operationen einen Werth liefert, der noch innerhalb der bei unseren Untersuchungen vorhandenen Fehlergrenze fällt, dass also schon dieser Werth als ausreichender Grenzwerth anzusehen ist.

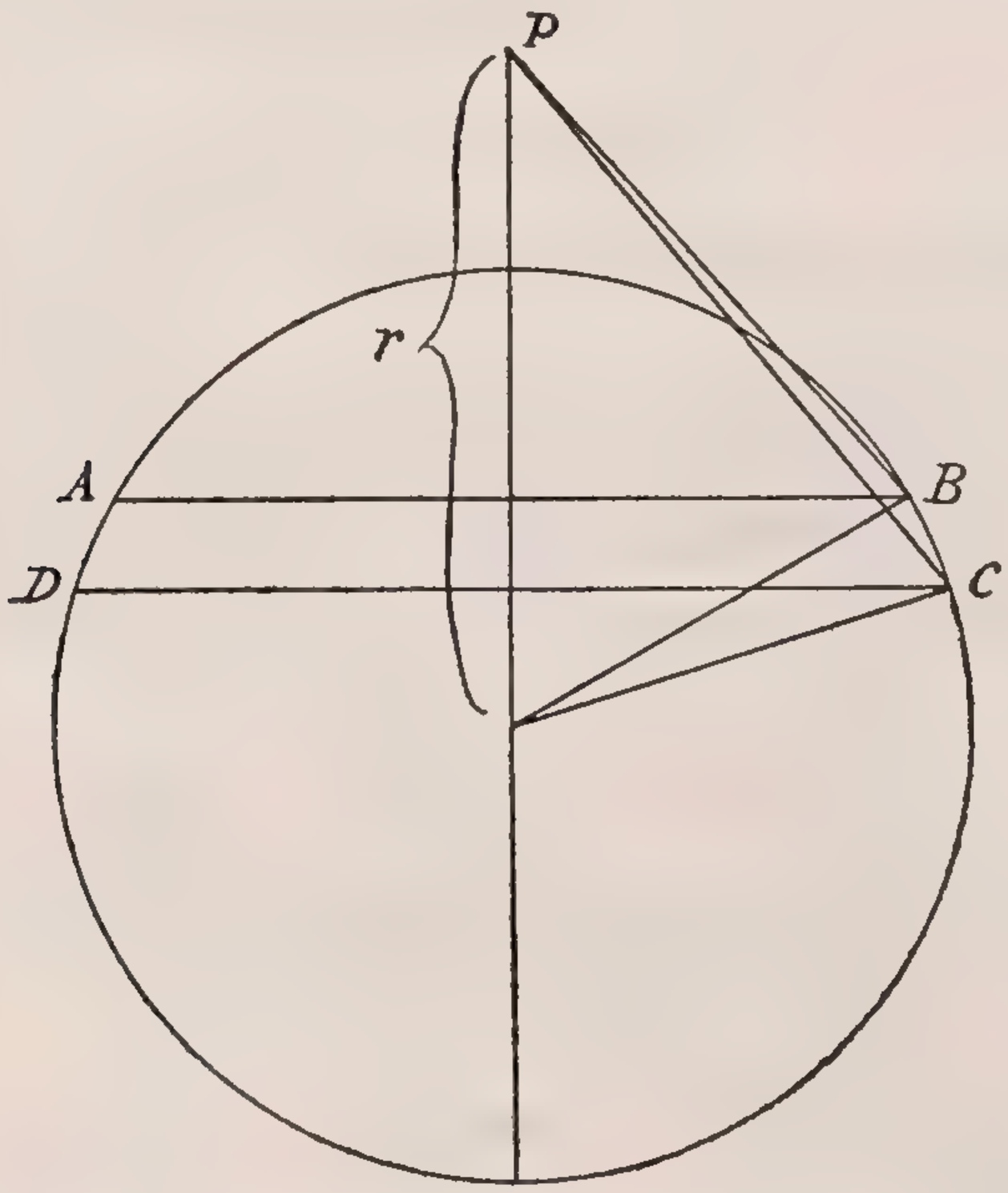


Es bedeute die punktirte Linie den gestörten Meeresspiegel, wie ihn die Tabellen unserer Arbeit näher angeben, die vollausgezogene Kreislinie die ungestörte Gleichgewichtslage der Wasserhülle.

Die Masse des Wulstes, der sich oberhalb der Linie a b befindet, ist neu hinzugekommen, ihr Potential muss dem Potential der störenden Massen hinzugefügt werden; die Masse des Wulstes unterhalb a b hingegen ist geschwunden, deren Potential muss subtrahirt werden. Dieses können wir auch dadurch zum Ausdruck bringen, dass wir uns die Kugeloberfläche mit Masse belegt denken, die proportional oder vielmehr gleich[1] den Erhebungshöhen ist, wie sie die Tabellen in der Arbeit für die einzelnen Eiscylinder enthalten; denn dann wird das Potential des unteren Wulstes, wo die Erhebungen in eine Senkung übergehen, von selbst negativ.

[1] wenn wir das specifische Gewicht des Meerwassers annähernd gleich 1 setzen.

Die Auswerthung des Potentials dieser Oberflächenbelegung führen wir durch eine gewisse Art von mechanischer Quadratur durch. Wir denken uns die Kugeloberfläche durch concentrische Parallelkreise im Abstand von 10 zu 10°, die ihren Mittelpunkt im Centrum des Eiscylinders haben, in Kugelzonen zerlegt, auf jeder Zone setzen wir den Werth der Oberflächenbelegung constant und berechnen dann für jede den Potentialwerth. Es lässt sich von vorneherein einsehen, dass die Maximalwirkung dort stattfinden wird, wo der höchste Stand des Meeres ist, das ist im Mittelpunkt des Eiscylinders. Wir wollen deshalb zuerst für diesen Punkt das Potential berechnen.



Sei P ein Punkt der Achse, für welchen das Potential berechnet werden soll; sein Abstand vom Kugelmittelpunkt sei r. Die Ränder der Kugelzone haben vom Pol den Winkelabstand α resp. β. Bedeutet ψ den Polabstand eines beliebigen Punktes der Kugelzone, so erhalten wir für die Oberfläche eines Zonenelements von der Breite $d\psi$ den Ausdruck:

$$2\pi R^2 \sin\psi \, d\psi.$$

Also wird seine Masse:

$$2\pi R^2 h \sin\psi \, d\psi.$$

Das Potential erhält demgemäss die Form:

$$v = 2\pi k^2 h R^2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin\psi \, d\psi}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\psi}}$$

Die Integration ergiebt:

$$v = 2\pi k^2 h R \frac{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\beta} - \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\beta}}{r}$$

Bezeichnen wir die Entfernung des Punktes P von den Rändern der Zone mit s_α und s_β, so wird:

$$v = 2\pi k^2 h R \frac{s_\beta - s_\alpha}{r}.$$

Lassen wir P auf die Kugeloberfläche selbst fallen, so wird $r = R$, somit:

$$v = 2\pi k^2 h (s_\beta - s_\alpha),$$

wo jetzt s_β und s_α Sehnen eines grössten Kugelkreises sind. Demgemäss ergiebt sich:

$$s_\beta = 2R\sin\frac{\beta}{2} \qquad s_\alpha = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$s_\beta - s_\alpha = 2R\left(\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = 4R\cos\frac{\beta+\alpha}{4}\sin\frac{\beta-\alpha}{4}.$$

Wir wollen annehmen, dass wir die $\varkappa$te Kugelzone haben. Dann ist $\alpha = (\varkappa - 1) \cdot 10^0$, $\beta = \varkappa \cdot 10^0$ und es wird

$$s_\beta - s_\alpha = 4R\cos\frac{2\varkappa - 1}{4} 10^0 \sin\frac{10^0}{4}.$$

Bezeichnen wir schliesslich den Winkel $2^0\,30'$ mit ε, so erhalten wir für das Potential der kten Kugelzone:

$$v_\varkappa = 8\pi k^2 R \sin\varepsilon \, h_\varkappa \cos(2\varkappa - 1)\varepsilon$$

Das Gesammtpotential der Kugelbelegung drücken wir also durch die Summe aus:

$$v = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=18} v_\varkappa = 8\pi k^2 R \sin\varepsilon \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=18} h_\varkappa \cos(2\varkappa - 1)\varepsilon$$

Die diesem Potentialwerth entsprechende Verschiebung der Geoidflächen erhalten wir, wenn wir v durch g_m dividiren. Es war

$$g_m = \frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R.$$

Die Division ergiebt für die Verschiebung der Geoidflächen in Punkt P:

$$h' = \frac{6\sin\varepsilon}{\Theta_m} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=18} h_\varkappa \cos(2\varkappa - 1)\varepsilon$$

Hieraus können wir leicht den Ausdruck für die Verschiebung der Geoidflächen im Gegenpunkte P′, wo offenbar die störende Wirkung am geringsten ist, ableiten. Wir erhalten ihn, wenn wir die Summation über die Grössen h in derselben Reihenfolge, dagegen über die Cosinus gerade in umgekehrter ausführen. Das giebt für die Verschiebung den Ausdruck:

$$h'' = \frac{6 \sin \varepsilon}{\Theta_m} \sum_{\varkappa=1}^{18} h_\varkappa \cos (37 - 2\varkappa)\, \varepsilon$$

Bei der Berechnung dieser beiden Ausdrücke entnehmen wir die Werthe von $h_\varkappa$ der Tabelle auf Seite 24. Da diese Rechnung doch nur zu einer Schätzung führen soll, rechnen wir in runden Zahlen. Wir setzen $\Theta_m = 6$, so dass als Factor vor der Summe nur sin ε bleibt. ε hat den Werth $2^0\,30'$. Das giebt für sin ε angenähert den Werth 0,04.

Die folgende Tabelle enthält den Werth des Products $h_\varkappa \cos \mu\varepsilon$ für beide Formeln:

$\mu\varepsilon$	$h_\varkappa \cos (2\varkappa - 1)\,\varepsilon$	$h_\varkappa \cos (37 - 2\varkappa)\,\varepsilon$
$2^0\,30'$	81	3
7 30	76	10
12 30	59	12
17 30	20	7
22 30	10	4
27 30	4	2
32 30	1	1
37 30	— 1	— 1
42 30	— 2	— 2
47 30	— 4	— 4
52 30	— 4	— 5
57 30	— 3	— 5
62 30	— 4	— 6
67 30	— 3	— 6
72 30	— 2	— 7
77 30	— 2	— 8
82 30	— 1	— 9
87 30	0	— 9
	$\Sigma = 225$	$\Sigma = -23$

Multipliciren wir die Werthe von Σ mit sin ε, so erhalten wir die Verschiebungen der Geoidfläche:

$$h' = 9 \text{ m} \qquad h'' = -0{,}9 \text{ m}.$$

Wir werden angenähert den Durchschnittswerth der Schwankung der Niveauflächen finden, wenn wir aus diesen beiden Extremwerthen das arithmetische Mittel bilden. Das giebt rund 4 m. Wir können demgemäss folgendes Resultat aussprechen:

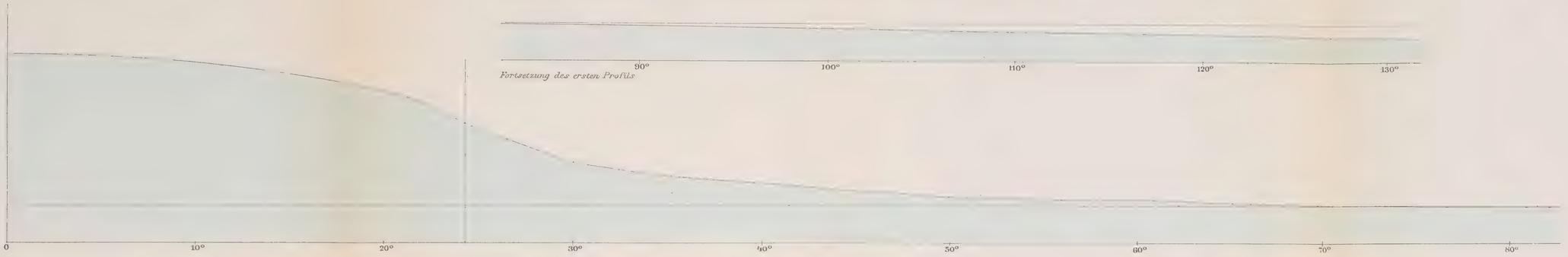
Das Potential des Wasserkörpers selbst bringt dort, wo die Wirkung am grössten ist, eine Verschiebung der Geoidflächen hervor, die nicht grösser als 9 m ist, im Gegenpunkt, wo das Minimum der Verschiebung eintritt, beträgt sie 9 dm. An andern Punkten der Erdoberfläche liegt die Wirkung zwischen diesen beiden Zahlen. Die Hebung der Niveauflächen beträgt im Durchschnitt 4 m.

Das Schwanken des Meeresspiegels, das durch diese Verschiebung der Gleichgewichtsflächen hervorgerufen wird, muss nach den Betrachtungen, die wir früher angestellt haben, noch geringer ausfallen.

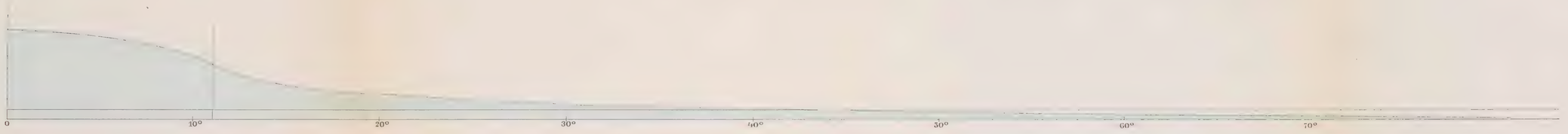
Wir können deshalb schliessen, dass das Potential des Wasserkörpers, der entstehen würde, wenn wir diese neue Geoidflächen zu Grunde legen würden, von dem soeben ausgerechneten sich um Zahlen unterscheiden wird, die in diesen Untersuchungen nicht mehr in Betracht zu ziehen sind.

Aus demselben Grunde hielten wir uns für berechtigt, in den früheren Untersuchungen die Störung, die durch den Wasserkörper hervorgebracht wird, überhaupt nicht zu berücksichtigen. Denn bei der Unsicherheit, die unseren Zahlen in Folge der mangelhaften Kenntniss anhaftet, die wir über die Verbreitung und Mächtigkeit der einstigen Eisbedeckung besitzen, kann eine Schwankung des Meeresspiegels, die im Durchschnitt noch unter 4 m liegt, nicht in Betracht kommen.

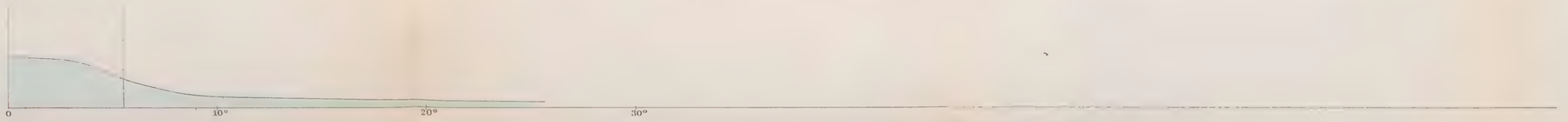
Für die drei ersten Profile: Höhenmasstab: $\frac{1}{2000}$. Längenmasstab: $\frac{1}{22\,500\,000}$.



Geoidfläche, gestört durch Cylinder I. Die Parallele deutet das ungestörte Meeresniveau an.

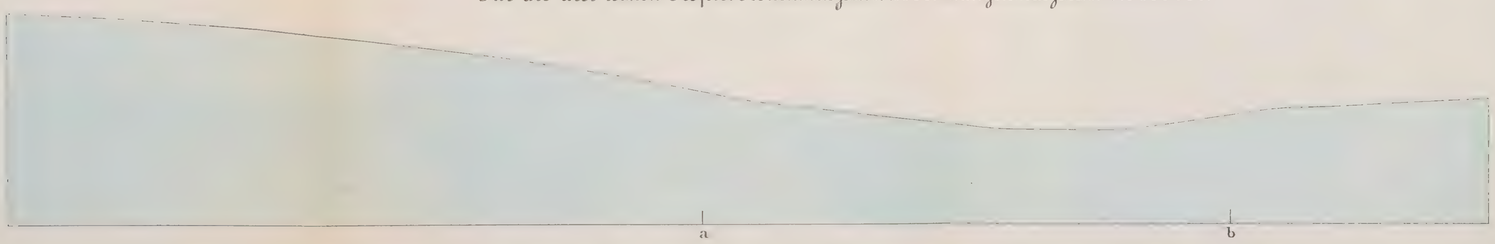


Geoidfläche, gestört durch Cylinder II.



Geoidfläche, gestört durch Cylinder III.

Für die drei letzten Profile: Höhenmasstab: $\frac{1}{2000}$. Längenmasstab: $\frac{1}{140\,000\,000}$.



Gestalt des Meeresspiegels, vom höchsten Punkt in Nordamerika zum höchsten Punkt in Europa.
a. Küste von Grönland. b. Küste von Europa.

Gestalt des Meeresspiegels längs der skandinavischen Küste.
a–b. Küste von Skandinavien.

Gestalt des Meeresspiegels längs der Mittellinie eines in die Eismasse eindringenden Busens.

Berliner lithogr. Institut.

Karte der zur Eiszeit vergletscherten Länder.

Maßstab: 1: 24 000 000.

Die ——— Linie giebt die Grenzen der Vereisung.

Die – – – – Linie giebt dieselben Grenzen, wie sie den Rechnungen zu Grunde gelegt wurden.

Die ——— Linien geben die Erhebungen des Meeresspiegels in Metern, jedoch ohne Berücksichtigung der Wassermenge, die zur Eisbildung verbraucht wurde.

Berliner lithogr. Institut

Oberm

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hergesell, Hugo,

Ueber die Aenderung der Gleichgewichtsflächen der Erde durch die Bildung polarer Eismassen und die dadurch verursachten Schwankungen des Meeresniveaus

1887

Phys.sp. 293 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11881641-3